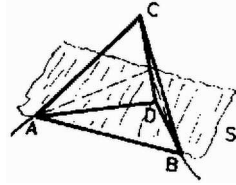


I. megoldás. Az ellenálláshálózatok eredő ellenállásának kiszámításánál nagyon sokat segít, ha megkeressük az ekvipotenciális pontokat. Ezek a pontok ellenállás nélküli vezetékkel összeköthetők, azaz egybejithetők, így az eredő ellenállás kiszámításához nagyon gyakran nincs szükség másra, mint a sorosan, illetve párhuzamosan kapcsolt ellenállások eredőjének kiszámítására.

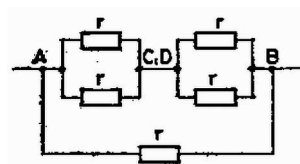
Mivel a szabályos testek minden éle azonos ellenállású, ezért a geometriai szimmetriák a potenciáltérkép szempontjából is léteznek: a testnek az áram be- és kivezeti pontjára (az ábrákon ezeket A és B jelöli) illeszkedő szimmetria síkja azonos potenciálú tükörképi pontokat választ el.



1. ábra

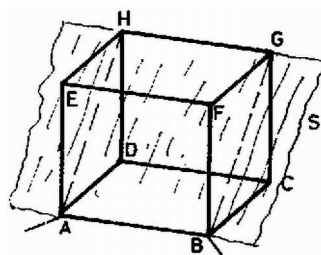
a) Tetraéder esetén (1. ábra) a C és D pontok tükörképei egymásnak az AB -re illeszkedő S szimmetriasíkra nézve, így ekvipotenciálisak. A kapcsolást átrajzolva (2. ábra) az eredő ellenállás könnyen kiszámítható:

$$R_{tetraéder} = \frac{r}{2}.$$

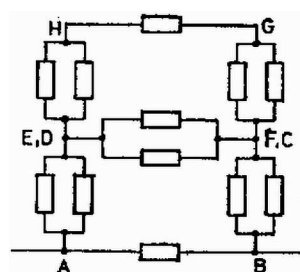


2. ábra

b) Kockánál az S szimmetriasík az A, B, G és H pontokon megy keresztül. Így az E és D , illetve F és C pontok ekvipotenciálisak (3. ábra).



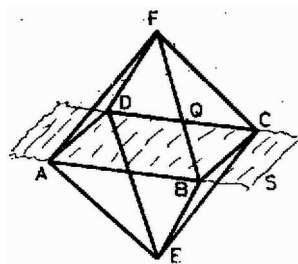
3. ábra



4. ábra

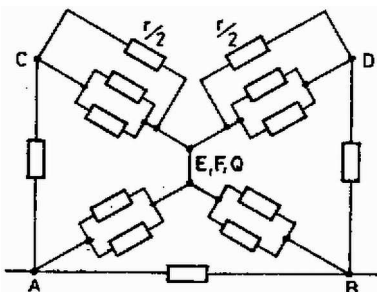
Az átrajzolt hálózat (4. ábra) eredő ellenállása

$$R_{kocka} = \frac{7}{12}r.$$



5. ábra

c) Oktaédernél a szimmetriasík az $ABCD$ sík (5. ábra). Itt E és F ekvipotenciális. A hálózat rajzánál (6. ábra) figyelembe vettük, hogy a CD él Q felezőpontja is ekvipotenciális az E és F pontokkal.



6. ábra

Az eredő ellenállás:

$$R_{oktaéder} = \frac{5}{12}r.$$

Hasonló geometriai megfontolások és egyszerű számítások után megkaphatjuk, hogy

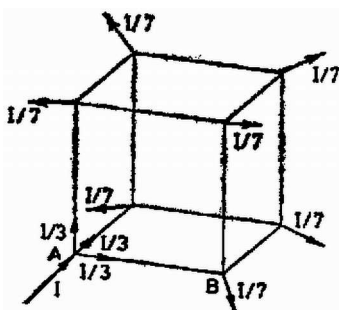
$$R_{dodekaéder} = \frac{19}{30}r,$$

illetve

$$R_{ikozsaéder} = \frac{11}{30}r.$$

Tóth Ildikó (Sárvár, Tinódi S. Gimn., III. o. t.)
dolgozata alapján

II. megoldás. Valamennyi poliéder esetén egyszerre megadhatjuk a választ, ha kihasználjuk a feladat nagyfokú szimmetriáját, nevezetesen azt, hogy a szabályos poliéderek egyik pontja sincs kitüntetve a többi csúcshoz képest, illetve, hogy mindegyik él ugyanakkora ellenállással rendelkezik.



7. ábra

Jelöljük a csúcsok számát N -nel, az egyes csúcsokba futó élek számát K -val (kocka esetén pl. $N = 8, K = 3$). Vezessünk a hálózat A pontjába I erősségű áramot (7. ábra). A többi csúcsból vezessünk el $\frac{I}{N-1}$ erősségű áramot, hogy a töltésmegmaradást kifejező Kirchhoff-törvény teljesüljön. Az A ponttal szomszédos csúcsok szimmetrikus szerepe miatt mindegyikük felé I/K erősségű áram folyik, így az A és B pont között a feszültség $\frac{Ir}{K}$.

Ismételjük meg az eljárást most oly módon, hogy a B pontnál kivezetünk I áramot, az összes többi csúcson pedig $\frac{I}{N-1}$ áramot vezetünk a hálózatba. Ekkor az A és B pont között most is $\frac{Ir}{K}$ lesz a feszültség.

Szuperponáljuk egymásra a két árameloszlást (az Ohm-törvény linearitása miatt ezt megtehetjük). Ekkor az A és B pontok között

$$U = \frac{Ir}{K} + \frac{Ir}{K} = \frac{2Ir}{K}$$

a feszültség, a teljes átfolyó áramerősség

$$I_e = I + \frac{I}{N-1} = \frac{N}{N-1}I.$$

és a szuperpozíció miatt az A és B csúcsok kivételével sehol sem folyik ki – vagy be – áram a hálózatba. Így az eredő ellenállás:

$$R = \frac{U}{I_e} = \frac{2(N-1)}{N \cdot K}r.$$

Az öt szabályos poliéderre tehát:

	N	K	R_e
tetraéder	4	3	$r/2,$
kocka	8	3	$7r/12,$
oktaéder	6	4	$5r/12,$
dodekaéder	20	3	$19r/30,$
ikozaéder	12	5	$11r/30.$

Hauer Tamás (Bp., ELTE Apáczai Csere J. Gimn., IV. o. t.)