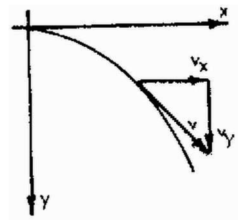
Vegyük fel az 1. ábrán látható koordináta-rendszert!



Vízszintes hajításnál

$$v_x(t) = v_0, \quad v_y(t) - gt,$$

a sebesség nagysága

$$v(t) = \sqrt{v_0^2 + g^2t^2}.$$

Legyen a feladatban rögzített sebesség $V \geqq v_0$. V a sebessége a testnek az eldobás utáni $t = \dfrac{\sqrt{V^2 - v_0^2}}{g}$ időpillanatban. Ebben a pillanatban az elmozdulás komponensei

(1) $$x = v_0 t = \frac{v_0\sqrt{V^2 - v_0^2}}{g},$$

(2) $$y = \frac{g}{2}t^2 = \frac{V^2 - v_0^2}{2g}.$$

v_0 kiküszöbölésével keressünk összefüggést x és y között! A (2) egyenletből

$$v_0^2 = V^2 - 2gy, \quad V^2 - v_0^2 = 2gy.$$

Ezeket behelyettesitve az (1)-ből adódó

$$g^2x^2 = v_0^2(V^2 - v_0^2)$$

összefüggésbe, kapjuk:

$$g^2x^2 = (V^2 - 2gy)2gy.$$

Az $a = \dfrac{V^2}{4g}$ jelöléssel a fenti összefüggés rendezés után így írható:

$$\frac{x^2}{(2a)^2} + \frac{(y-a)^2}{a^2} = 1.$$

Ez egy ellipszis egyenlete, amelynek középpontja a $(0; a) = (0; 40{,}7)$ pont, kistengelye $a = 40{,}7$ m, nagytengelye $2a = 81{,}4$ m.

Megmutatjuk, hogy az ellipszis minden pontjához van olyan $v_0 \leqq V$ nagyságú kezdősebesség, hogy a test a V sebességet az ellipszisnek ebben a pontjában éri el, tehát azt, hogy az ellipszis minden pontja hozzátartozik a mértani helyhez. Válasszunk ki egy $y_1 \leqq 2a = \dfrac{V^2}{2g}$ ordinátájú pontot az ellipszisen ($y_1 \geqq 0$), amely a kezdőponttól pl. pozitív x_1 irányban helyezkedik el, ennek $x_1 \geqq 0$ abszcisszáját egyértelműen meghatározza az

$$\frac{x_1^2}{(2a)^2} + \frac{(y_1-a)^2}{a^2} = 1$$

összefüggés.

Másrészt az előbbiekben láttuk, hogy a v_0 kezdősebességgel elindított test a $P\left(\dfrac{v_0\sqrt{V^2 - v_0^2}}{g}, \dfrac{V^2 - v_0^2}{2g}\right)$ pontban ér el V sebességet. Ha – az $y_1 = \dfrac{V^2 - v_0^2}{2g}$ egyenlőségből kiindulva –

$$v_0 = \sqrt{V^2 - 2gy_1}$$

kezdősebességet választunk $\left(y_1 \leqq \dfrac{v^2}{2g} \quad \text{miatt} \quad V^2 - 2gy_1 \geqq 0\right)$, akkor a test az $y_1 = \dfrac{V^2 - v_0^2}{2g}$ ordinátájú, $x_1' = \dfrac{v_0\sqrt{V^2 - v_0^2}}{g}$ abszcisszájú pontban éri el a V sebességet. Mivel az előzőek szerint $x_1' (\geqq 0)$ kielégíti az

$$\frac{(x_1')^2}{(2a)^2} + \frac{(y_1-a)^2}{a^2} = 1$$

összefüggést, így szükségképpen $x_1' = x_1$, vagyis a $v_0 = \sqrt{V^2 - 2gy_1}$ kezdősebességgel indított test éppen az ellipszis (x_1, y_1) pontjában éri el a V nagyságú sebességet.

Mekis Attila (Békéscsaba, Rózsa F. Gimn., II. o. t.)