Kezdetben a tömegközéppont is V sebességgel halad. A rugalmatlan ütközés következtében az ütköző test elveszti sebességét, a másik test mozgása az ütközés pillanatától kezdve harmonikus rezgőmozgás, amelynek frekvenciája $f_0=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{D}{m}}$. A nyugalmi helyzet az a pont, ahol ez a test az ütközés pillanatában volt, vagyis a faltól L távolságra. Az energiamegmaradás értelmében

$$\frac{1}{2}mV^2=\frac{1}{2}DA^2,$$

ahonnan a rezgés amplitúdója:

$$A=V\sqrt{\frac{m}{D}}.$$

Ebből láthatjuk, hogy teljesülnie kell az $L>V\sqrt{\frac{m}{D}}$ feltételnek, sőt, mivel a lineáris erőtörvény túl nagy összenyomás esetén érvényét veszti, további leírásunk csak az

$$L\gg V\sqrt{\frac{m}{D}} \tag{1}$$

feltétel esetén lesz érvényes.

A rezgőmozgást végző test kitérés–idő függvénye

$$y=A\cdot\sin\left[\omega_0(t-t_0)\right],$$

ahol t_0 az ütközés időpillanata, $\omega_0=2\pi f_0=\sqrt{\frac{D}{m}}$. A tömegközéppont $x=\frac{L-y}{2}$ koordinátája így az

$$x=\frac{L}{2}-\frac{V}{2}\sqrt{\frac{m}{D}}\sin\left[\sqrt{\frac{D}{m}}(t-t_0)\right] \tag{2}$$

függvény szerint változik, ahol x-et a faltól mérjük (1. ábra). A fallal nem érintkező test rezgőmozgásából egy fél periódus zajlik le, mert ezután a rugóban már húzóerő ébred, ami elrántja a másik testet a faltól. A fenti (2) képlet tehát a fallal való érintkezés időtartamára érvényes. Ez az időtartam:

$$\pi\sqrt{\frac{m}{D}}. \tag{3}$$

1988-10-333-1.eps

1–3 ábrák

$t-t_0>\pi\sqrt{\frac{m}{D}}$ esetén (az elválás után) a rendszerre már nem hat külső erő: a tömegközéppont az elválás pillanatától állandó $\frac{V}{2}$ sebességgel távolodik a faltól (2. ábra folytonos vonallal jelölt görbéje).

A testek az elválás után a tömegközéppont körül rezegnek. A tömegközéppont a rugó közepénél található és állandó $V/2$ sebességgel mozog, vagyis mindkét test egy-egy $L/2$ hosszúságú rugón végez harmonikus rezgőmozgást. Az ideális rugó direkciós ereje arányos a nyugalmi hosszának reciprokával, ezért most $D^*=2D$. A rezgés frekvenciája:

$$f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{D^*}{m}}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2D}{m}}. \tag{4}$$

A rendszernek két szabadsági foka van: a $V/2$ sebességű haladó mozgás és az f frekvenciájú rezgés. Az elsőre $\frac{1}{2}2m\left(\frac{V}{2}\right)^2=\frac{mV^2}{4}$ energia jut. A tömegközépponttal együttmozgó koordinátarendszerből nézve a testek sebessége a nyugalmi helyzeten való áthaladáskor $\frac{V}{2}$ és $-\frac{V}{2}$, így a rezgési energia $2\cdot\frac{1}{2}\cdot m\left(\frac{V}{2}\right)^2=\frac{mV^2}{4}$. A visszafelé haladó rendszer teljes energiája a tömegközépponti rendszerben mérhető energia és a „tömegközéppont mozgási energiájának” összege:

$$\frac{mV^2}{4}+\frac{mV^2}{4}=\frac{mV^2}{2}.$$

A rendszer tehát a haladó mozgásban és a rezgésben egyenlő energiát tárol.

A tömegközéppont helyének, valamint a tömegközéppont és a testek sebességének időfüggését az 1. és a 2. ábra mutatja. Az ütközés t_0 időpillanatában a helyfüggvényben törés, a tömegközéppont és a fallal ütköző test sebességfüggvényében ugrás látható. Ez a rugalmatlan ütközésnek köszönhető, ami durva beavatkozás a rendszer „életébe”.

Wolkensdorfer Péter (Székesfehérvár, József A. Gimn., IV. o. t.)

Megjegyzések. 1. A megoldók körében meglehetős zavar uralkodott a szabadsági fok fogalmával kapcsolatban. Definíció szerint a szabadsági fok azon független koordináták száma, amivel a rendszer térbeli helyzete egyértelműen rögzíthető. Ezért a fentebb vizsgált rendszer szabadsági fokainak száma 2. A rendszer helyzetét rögzíthetjük a két test koordinátáinak megadásával, de úgy is eljárhatunk, hogy megadjuk a tömegközéppont és az egyik test helyzetét (a másik test helyzete ebből már következik, a tömegek adottak). Ez utóbbi módszerhez kötődik az a szóhasználat, hogy a rendszernek transzlációs és rezgési szabadsági foka van.

Általában egy n testet tartalmazó, egyenes mentén mozgó rugós rendszer rezgési szabadsági fokainak a száma $n-1$, hiszen n a teljes szabadsági fok és ebből 1 az egyenes mentén való közös haladó mozgást (tömegközéppont mozgása) jelenti. Hasonlóan lehet gondolkodni több dimenzióban is, ekkor a forgást is figyelembe kell venni.

Az energiatárolási képesség a statisztikus fizika egyenlő osztozkodás (ekvipartíció) tétele szerint kapcsolatban áll a rendszer szabadsági fokainak számával: minden olyan koordinátára és impulzusra, amely egy egyensúlyban lévő rendszer összenergiájának felírásában négyzetesen szerepel, egyenlő, $\frac{1}{2}kT$ átlagos energia jut. Ideális gáz esetén az energia csak a részecskék impulzusnégyzetétől függ, ezek száma pedig megegyezik a szabadsági fokok számával (impulzuskomponensekben gondolkodva). Viszont már a fenti rezgő rendszer esetén az energiakifejezésben szereplő négyzetes tagok száma nagyobb a rendszer szabadsági fokainak a számánál. A szabadsági fokok száma tehát nem feltétlenül egyezik meg az energiatárolási képességek számával: harmonikus rezgések esetén elterjedt szóhasználat szerint a rendszer energia felvevés szempontjából „két szabadsági foknak megfelelően” viselkedik.

2. Tanulságos az energia faltól való elválás utáni megoszlásának időbeli változását nyomon követni (a fallal való érintkezés alatt a harmonikus rezgés szokásos képletei érvényesek). Tömegközépponti rendszerből nézve a rugó nyújtatlan állapotában a testek sebessége $-\frac{V}{2}$, illetve $\frac{V}{2}$. A sebességek változását így itt a $-\frac{V}{2}\cos\omega t$, illetve a $\frac{V}{2}\cos\omega t$ függvények írják le. A mozgási energia a nyugvó rendszerből nézve: (az időt az elválástól mérjük)

$$E_{1m}=\frac{1}{2}m\left(\frac{V}{2}-\frac{V}{2}\cos\omega t\right)^2=\frac{mV^2}{8}(1-\cos\omega t)^2,$$

$$E_{2m}=\frac{1}{2}m\left(\frac{V}{2}+\frac{V}{2}\cos\omega t\right)^2=\frac{mV^2}{8}(1+\cos\omega t)^2.$$

Ha a szabadsági fokokra jutó energiát akarjuk számolni, akkor ezekhez még hozzá kell adni az egyes testek helyzeti energiáit. A rugóban tárolt helyzeti energia mindkét testre $\frac{1}{2}(2D)\cdot x^2$, ahol x a test kitérése az egyensúlyi helyzetéhez képest, $x=\pm\frac{V}{2\omega}\sin\omega t$. Az egyes szabadsági fokokra jutó energia így $\left(\omega^2=\frac{2D}{m}\right)$:

$$E_1=\frac{mV^2}{8}(1-\cos\omega t)^2+\frac{1}{2}(2D)\cdot\frac{V^2}{4\omega^2}\sin^2\omega t=\frac{mV^2}{4}(1-\cos\omega t),$$

és hasonlóan:

$$E_2=\frac{mV^2}{4}(1+\cos\omega t).$$

A kettő összege a teljes $\frac{mV^2}{2}$ energia, időbeli átlaga mindkét esetben $\frac{mV^2}{4}$ ($\cos\omega t$ időátlaga nulla). Az energiák ilyen számolása annak felel meg, amikor a rendszer helyzetét a két test koordinátájával adjuk meg. A 3. ábrán a mozgási energia időfüggését külön ábrázoltuk, a helyzeti energiákat pedig összeadva, mint „rugóenergiát” rajzoltuk fel $\left(E_r=\frac{1}{2}D(2x)^2=2\cdot\frac{1}{2}(2D)x^2=\frac{1}{2}D\cdot\frac{V^2}{\omega^2}\sin^2\omega t\right)$. Amennyiben a rendszer helyzetét a tömegközéppont és az egyik test helyzetével rögzítjük, úgy a transzlációra az időben állandó $2\cdot\frac{1}{2}m\left(\frac{V}{2}\right)^2=\frac{mV^2}{4}$ energia jut. A rezgés $\frac{1}{4}mV^2$ energiája a kinetikus és a potenciális energiából tevődik össze. A testek kinetikus energiája külön-külön az $\frac{1}{2}m\left(\frac{V}{2}\cos\omega t\right)^2$ függvénnyel írható le, ennek időátlaga $\frac{mV^2}{16}$. Az összes potenciális energia (rugóenergia) az $\frac{1}{4}mV^2\sin^2\omega t$ függvény szerint változik, időátlaga $\frac{mV^2}{8}$.

3. Amennyiben az (1) feltétel nem teljesül, csak numerikus módszerekkel, lépésről lépésre tudjuk a jelenséget követni.

4. A rendszer egy kétatomos molekula legegyszerűbb modelljének tekinthető.