Az abroncs a mozgásának első szakaszában csúszva gördül, majd amikor a súlypontjának sebessége megegyezik a súlypont körüli körmozgásból származó kerületi sebességgel, tiszta gördüléssel mozog tovább.

Legyen az abroncs súlypontjának távolsága a lejtő tetejétől x! Ekkor a feladatnak megfelelően változó súrlódási együttható:

$$\mu(x) = \frac{x}{l}, \tag{1}$$

ahol $l = 1$ m, a lejtő teljes hossza.

1988-12-465-1.eps

1. ábra

Írjuk fel a csúszva gördülés esetén érvényes mozgásegyenleteket! (1. ábra)

$$mg\sin\alpha - S = ma, \tag{2}$$
$$N = mg\cos\alpha, \tag{3}$$
$$SR = \Theta\beta, \tag{4}$$

ahol a súrlódási erő:

$$S = \mu(x)N, \tag{5}$$

az abroncs tehetetlenségi nyomatéka

$$\Theta = m\cdot R^2, \tag{6}$$

R az abroncs sugara, m pedig a tömege; α a lejtő szöge.

Az (1), (3), (5) és (6) egyenlet segítségével (2) az alábbiakra hozható:

$$a = g\sin\alpha - \frac{x}{l}g\cos\alpha. \tag{7}$$

Vezessük be az $y = x - l\mathrm{tg}\alpha$ új változót! (Ez mindössze a koordinátarendszer kezdőpontjának eltolását jelenti, a gyorsulást nem változtatja meg.)

Az új mozgásegyenlet

$$a = -\frac{g\cos\alpha}{l}y, \tag{8}$$

amely pontosan olyan alakú (a gyorsulás arányos a „kitéréssel” és vele ellentétes irányú), mint amilyen a harmonikus rezgőmozgásra jellemző. A körfrekvencia (melyet most az abroncs szögsebességétől megkülönböztetve λ-val fogunk jelölni):

$$\lambda = \sqrt{\frac{g\cos\alpha}{l}}. \tag{9}$$

A rezgőmozgást leíró $y(t)$ függvény adatait (paramétereit) úgy kell megválasztanunk, hogy a $t = 0$ időpillanatban a sebesség nulla, a kitérés pedig az $x = 0$-nak megfelelő $y = -l\mathrm{tg}\alpha$ legyen. Ezeknek a feltételeknek

$$y(t) = -l\cdot\mathrm{tg}\alpha\cdot\cos\lambda t$$

tesz eleget. Az abroncs mozgását leíró (7) egyenlet megoldása tehát

$$x(t) = l\mathrm{tg}\alpha(1-\cos\lambda t), \tag{10}$$
$$v(t) = l(\mathrm{tg}\alpha)\lambda\sin\lambda t. \tag{11}$$

A továbbiakban a súlypont körüli forgómozgást vizsgáljuk. A (4)–(6) és (10) egyenlet alapján:

$$\beta(t) = \frac{x(t)\cdot g\cos\alpha}{l\cdot R} = \frac{g\sin\alpha}{R}(1-\cos\lambda t). \tag{12}$$

Könnyen belátható, hogy a súlypont körüli forgás szögsebessége:

$$\omega(t)=\frac{g\sin\alpha}{R}\left(t-\frac{1}{\lambda}\sin\lambda t\right). \tag{13}$$

(Az $\omega(t)$ függvény deriváltja éppen a fenti $\beta(t)$ függvényt adja.)

Az eddigi eredmények a csúszva gördülés esetére vonatkoznak. Az abroncs abban a t_0 pillanatban kezd el tisztán gördülni, amikor $v(t_0)=\omega(t_0)\cdot R$.

A (11) és (13) összefüggést felhasználva t_0-ra adódó egyenlet:

$$2\sin\lambda t_0=\lambda t_0. \tag{14}$$

Ezt nem lehet elemi úton megoldani, numerikus módszerrel a gyöke:

$$\lambda t_0=\eta\approx 1,89.$$

A fenti gyököt a (10) egyenletbe helyettesítve megkapjuk azt az x_0 távolságot, ahonnan az abroncs tisztán fog gördülni:

$$x_0=l\mathrm{tg}\alpha(1+\sqrt{1-(\eta/2)^2})\approx 1,32\cdot l\cdot\mathrm{tg}\alpha=0,48\ \mathrm{m}. \tag{15}$$

Innen a súrlódási erő nem végez munkát az abroncson, így a mozgás során teljesül a mechanikai energiamegmaradás törvénye:

$$\frac{1}{2}mv_0^2+\frac{1}{2}\Theta\omega_0^2+mg(l-x_0)\sin\alpha=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}\Theta\omega^2. \tag{16}$$

Az egyenlet bal oldalának első tagja a haladó mozgás, a második a forgómozgás energiája a tiszta gördülés kezdetén, az utolsó tagja pedig a helyzeti energia megváltozása, amíg a test a lejtő aljára nem ér, ahol a sebessége v, szögsebessége ω lesz. Mivel tiszta gördülésről van szó, a $v=\omega R$ feltétel teljesül. Θ (6)-beli értékét a (16) egyenletbe írva az abroncs végsebessége:

$$v=\sqrt{v_0^2+g(l-x_0)\ \sin\ \alpha}.$$

A t_0-beli sebességet a (11) egyenletből kapjuk:

$$v_0=l(\mathrm{tg}\,\alpha)\,\lambda\ \sin\ \lambda\,t_0=\frac{\eta}{2}(gl\ \sin\ \alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha)^{1/2}.$$

Ezt behelyettesítve a lejtő alján az abroncs sebessége:

$$v=\left\{g\,l\ \sin\ \alpha\big[\,1-\mathrm{tg}\,\alpha(1-(\eta/2)^2+\sqrt{1-(\eta/2)^2})\big]\right\}^{1/2}\ \approx$$
$$\approx\ \big[\,gl\ \sin\ \alpha(1-0,42\,\mathrm{tg}\,\alpha)\big]^{1/2}=1,69\ \mathrm{m/s}.$$

Bodrogi Péter (Miskolc, Földes Ferenc Gimn., II. o .t.)

Megjegyzés. Ha felírjuk a tiszta gördülésre vonatkozó mozgásegyenleteket és kényszerfeltételeket, akkor az (1) – (4), (6) egyenletek változatlanul maradnak, az (5) helyébe pedig az $a=\beta\,R$ kényszerfeltétel kerül. Az egyenletrendszerből $a=\frac{1}{2}g\ \sin\ \alpha$ és $S=ma=\frac{1}{2}mg\ \sin\ \alpha$; a gördülés feltételeként μ-re tehát azt kapjuk, hogy $\frac{1}{2}\mathrm{tg}\,\alpha\ \leqq\ \mu(x)$, azaz

$$x\ \geqq\ \frac{1}{2}\mathrm{tg}\,\alpha=x_h.$$

A (15) eredmény szerint a tiszta gördülés valójában jóval x_h után kezdődik, mert a tapadásnak az $S\ \leqq\ \mu N$ egyenlőtlenség csak szükséges, de nem elégséges feltétele. Sok megoldó megfeledkezett erről, és így hibás eredményre jutott.

1988-12-465-2.eps

2. ábra

Ha felrajzoljuk a helyes megoldás segítségével az abroncs sebességének és gyorsulásának idő-függését (2. ábra) (pl. Tóth Ildikó számítógépes programja alapján, vagy a (8), (10) és (11) egyenletekkel analitikusan adjuk meg a görbéket), akkor látható, hogy a gyorsulás-függvénynek a t_0 pontban ugrása van, a hibás eredmény pedig az ábrán berajzolt szaggatott vonalnak a csúszva gördülést meghatározó gyorsulásgörbe t_h-beli metszéspontja alapján adódik.