Legyen a rendszer helyzetét jellemző változó az 1. ábrán látható α szög.

1988-11-416-2.eps

1. ábra

Határozzuk meg először az egyensúlyi helyzetet megadó α_0 szöget! A fonalat mg erő feszíti, ennek érintő irányú összetevője, $mg\cos\alpha_0$ egyensúlyt kell tartson az Mg súlyerő $Mg\cos 2\alpha_0$ érintőleges komponensével.

(1) $$Mg\cos 2\alpha = mg\cos\alpha_0,$$

ami némi átalakítás után a

$$2M\cos^2\alpha_0 - m\cos\alpha_0 - M = 0$$

másodfokú egyenletté alakítható. Ennek megoldása

(2) $$\cos\alpha_0 = \frac{m+\sqrt{m^2+8M^2}}{4M},$$

(a másik gyök a feladat szempontjából érdektelen). Az egyensúly nyilvánvalóan csak úgy állhat fenn, ha $m<M$.

Feladatunk az egyensúlyi helyzet körüli kis amplitúdójú rezgések periódusidejének meghatározása. Térítsük ki a rendszert az egyensúlyi helyzetéből $\alpha=\alpha_0+\varepsilon$ szögnek megfelelő helyzetbe ($\varepsilon \ll 1$), majd kezdősebesség nélkül engedjük el. Feltevésünk szerint az α szög a harmonikus rezgőmozgás képletei szerint váltakozik $T=2\pi/\omega$ periódusidővel:

$$\alpha = \alpha_0 + \varepsilon\cos\omega t.$$

Az egyensúlyi helyzeten való áthaladás pillanatában a legnagyobb az α szög változási sebessége

$$\left.\frac{\Delta\alpha}{\Delta t}\right|_{\max} = \varepsilon\cdot\omega,$$

s ezzel együtt a M tömegű test $V = R\dfrac{\Delta(2\alpha)}{\Delta t}$ sebessége is akkor a legnagyobb,

$$V_{\max} = 2R\omega\cdot\varepsilon.$$

1988-11-416-3.eps

2. ábra

A m tömegű test sebessége a 2. ábra szerint az egyensúlyi helyzet közelében

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta y\cdot\cos\alpha}{\Delta t} = V_{\max}\cdot\cos\alpha_0 = 2R\omega\varepsilon\cos\alpha_0.$$

A rendszer teljes mozgási energiája az egyensúlyi helyzeten való áthaladás pillanatában

(3) $$E_{\text{mozg}} = \frac{1}{2}M(2R\omega\varepsilon)^2 + \frac{1}{2}m(2R\omega\varepsilon\cos\alpha_0)^2.$$

Számítsuk most ki a rendszer helyzeti energiáját a legnagyobb kitérésnél; az energia nullpontját az egyensúlyi helyzethez rögzítjük. Mivel a m tömegű test emelkedése a fonál nyújthatatlansága miatt

$$\Delta x = 2R[\sin(\alpha_0+\varepsilon) - \sin\alpha_0],$$

a helyzeti energia

(4) $$E_{\text{helyz}} = mg\cdot 2R[\sin(\alpha_0+\varepsilon)-\sin\alpha_0] - \\ -MgR[\sin 2(\alpha_0+\varepsilon) - \sin 2\alpha_0].$$

Mivel a súrlódás elhanyagolható, a legnagyobb kitéréshez tartozó helyzeti energiának meg kell egyeznie az egyensúlyi helyzeten való áthaladás pillanatában észlelhető maximális mozgási energiával. (3) és (4) összevetéséből

(5) $$2(M+m\cos^2\alpha_0)R\cdot\omega^2\cdot\varepsilon^2 = 2mg[\sin(\alpha_0+\varepsilon)-\sin\alpha_0] - \\ -Mg[\sin(2\alpha_0+2\varepsilon) - \sin 2\alpha_0].$$

A szögletes zárójelben álló kifejezések az addiciós tétel és a kis szögekre érvényes $\sin\varepsilon\approx\varepsilon$ összefüggés felhasználásával

$$\begin{aligned}\sin(\alpha_0+\varepsilon)-\sin\,\alpha_0&=(\cos\,\varepsilon-1)\sin\,\alpha_0+\sin\,\varepsilon\cdot\cos\alpha_0=\\&=-2\sin^2\frac{\varepsilon}{2}\cdot\sin\,\alpha_0+\sin\,\varepsilon\cdot\cos\alpha_0\approx\varepsilon\cdot\cos\,\alpha_0-\frac{1}{2}\varepsilon^2\sin\,\alpha_0,\end{aligned}$$

illetve

$$\sin(2\alpha_0+2\varepsilon_0)-\sin\,2\alpha_0\approx 2\varepsilon\cos\,2\alpha_0-2\varepsilon^2\cdot\sin\,2\alpha_0.$$

Tekintettel az (1) egyensúlyi feltételre (5) jobb oldalán az ε-nal arányos tagok kiesnek, így mindkét oldalt ε^2-tel végigosztva az ω-ból kiszámítható periódusidő:

$$T=2\pi\cdot\sqrt{\frac{2R}{g}\cdot\frac{M+m\cos^2\alpha_0}{2M\sin\,2\alpha-m\,\sin\,\alpha_0}},$$

ahol

$$\alpha_0=\text{arc cos}\left(\frac{m+\sqrt{m^2+8M^2}}{4M}\right).$$

Ha $m\ll M$, akkor $\alpha_0\approx 45^\circ$ és $T=2\pi\sqrt{R/g}$ az R hosszúságú fonálinga lengésideje. Általában T az m/M tömegarány függvényében a 3. ábrán látható módon változik.

1988-11-417-1.eps

3. ábra

Megjegyzés. Sok megoldó nem vette észre, hogy a két test különböző gyorsulással mozog, és emiatt hibás eredményt kaptak.