Kövessük végig képzeletben, hogy miként zajlik le a kérdéses – meglehetősen összetett és bonyolult – folyamat. Az érdekesebb helyzetekről készítsünk ábrát is!

a) Ha óvatosan ráhelyeznénk az m_1 tömegű testet a rugóra, akkor az $\Delta x = m_1 g/D$ hossznyival összenyomódna a nyújtatlan (n) hosszához képest. A rugó ekkor $K = m_1 g$ erőt fejtene ki mindkét végén. Az emelőre a végein Mg, illetve $(m_1 + m_2)g$ nagyságú erő hatna, a forgástengelynél pedig egy megfelelő nagyságú F erő tartana egyensúlyt velük. Mivel az emelő ebben a helyzetben egyensúlyban lenne, a forgatónyomatékok egyensúlya is fenn kell álljon *(1. ábra)*:

(1) $$(m_1 + m_2)gr = MgR.$$

1988-11-413-1.eps

1. ábra

Ha a rugót jobban összenyomjuk, minta fentebb tárgyalt egyensúlyi helyzet, (e), akkor az általa kifejtett erő meghaladja az $m_1 g$ értéket, és az emelő egyensúlya megbomlik. Ilyenkor az m_2 tömeg süllyedni kezd, az M tömegű test pedig fölfelé gyorsul. Az egyensúlyi helyzetnél hosszabb rugó esetén a helyzet éppen fordított: az M tömegű test lefelé gyorsul (illetve kezdetben az alátámasztás miatt egyensúlyban van).

b) Vizsgáljuk ezek után az ütközés egyes fázisait! Az m_1 tömegű testet h magasságból leejtve az

(2) $$v_0 = \sqrt{2gh}$$

sebességgel csapódik a rugó végének *(2. ábra)*.

1988-11-413-2.eps

2. ábra

A rugó ekkor még feszültségmentes, majd ahogy az m_1 tömegű test lefelé mozog, egyre nagyobb erő ébred benne. Az a) pontban leírtak értelmében az emelő mindaddig nyugalomban marad, míg a rugóerő el nem éri az $m_1 g$ értéket, vagyis amíg a lefelé mozgó (m_1 tömegű) test át nem halad az (e)-vel jelzett egyensúlyi helyzeten.

c) Az egyensúlyi helyzeten való áthaladtakor az m_1 tömegű test sebessége v_1, melynek nagyságát az energia-tételből számíthatjuk ki *(3. ábra)*:

1988-11-414-1.eps

3. ábra

(3) $$\frac{1}{2}m_1 \cdot v_0^2 + m_1 \cdot g \cdot \frac{m_1 \cdot g}{D} = \frac{1}{2}m_1 \cdot v_1^2 + \frac{1}{2}D \cdot \left(\frac{m_1 \cdot g}{D}\right)^2,$$

ahonnan

(4) $$v_1 = \sqrt{v_0^2 + \frac{m_1 \cdot g^2}{D}}.$$

Ebben a pillanatban az emelő megmozdul, és egyre növekvő szöggyorsulással forogni kezd. A támaszték a továbbiakban nem játszik szerepet, ezért a rajzon föl se tüntetjük.

d) A rugó maximálisan összenyomott állapotában *(4. ábra)* és még a továbbiakban is az emelő szögsebessége egyre nő, egészen addig, míg az m_1 tömegű test ismét át nem halad az egyensúlyi helyzetnek megfelelő (e) vonalon *(5. ábra)*. Feltételezzük, hogy a rugó elég „kemény”, emiatt az egész folyamat nagyon gyorsan megy végbe és az emelő szögelfordulása nagyon kicsi. Ez egyúttal azt is jelenti, hogy elhanyagolhatjuk az emelő végpontjainak elmozdulását a 3. és az 5. ábrán látható állapotok közötti időben.

1988-11-414-2.eps

4. ábra

1988-11-415-1.eps

5. ábra

Amikor az m_1 tömeg áthalad az egyensúlyi helyzeten, az emelő valamekkora ω szögsebességgel, az M tömegű test pedig $R\omega$ függőleges sebességgel rendelkezik. Mivel a továbbiakban az M tömeg már lefelé fog gyorsulni, sebessége egyre csökken, így a keresett legnagyobb függőleges sebesség éppen $R\omega$.

Jelöljük az m_1 tömegű test maximális sebességét v_2-vel, s alkalmazzuk az emelőn levő testek tehetetlenségi nyomatékára a $\Theta = m_2r^2 + MR^2$ jelölést. A v_1 és a v_2 sebességgel jelölt állapotokra (3. és 5. ábra) felírhatjuk az energia és a perdület megmaradásának törvényét. A helyzeti energia változását a folyamat gyorsasága miatt elhanyagoljuk, így

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 = \frac{1}{2}m_1v_2^2 + \frac{1}{2}\Theta\omega^2, \tag{5}$$

$$m_1 \cdot r(v_1 + v_2) = \Theta\omega, \tag{6}$$

ahonnan

$$v_2 = \frac{\Theta - m_1 \cdot r^2}{\Theta + m_1 \cdot r^2} \cdot v_1$$

és

$$\omega = \frac{2 \cdot m_1 \cdot r \cdot v_1}{\Theta + m_1 \cdot r^2}. \tag{7}$$

Az M tömegű test sebessége

$$V = R \cdot \omega = \frac{2 \cdot m_1 \cdot v_1}{(m_1 + m_2)\dfrac{r}{R} + M\dfrac{R}{r}}, \tag{8}$$

ennek keressük a maximumát különböző r, R és M esetén. Nem szabad azonban megfeledkeznünk arról, hogy ezek a paraméterek nem függetlenek egymástól, hiszen fenn kell állni az (1) egyenlőségnek is. Ebből M-t kifejezve és (8)-ba helyettesítve

$$V = \frac{2 \cdot m_1 \cdot v_1}{(m_1 + m_2)\left(1 + \dfrac{r}{R}\right)} \tag{9}$$

adódik. Ez a kifejezés akkor maximális, ha a nevező minimális, az pedig az $r/R \to 0$, vagy másképpen írva $R \to \infty$ határesetben teljesülne. Azt kaptuk tehát, hogy semmilyen véges r/R aránynál nem lehet az M tömegű test függőleges „lendülésének” maximuma. A V sebességre csupán egy felső korlátot adhatunk: értéke tetszőlegesen nagy R esetén is biztosan kisebb, mint

$$V_{\max} = \frac{2 \cdot m_1}{m_1 + m_2}v_1.$$

(Czakó Ferenc)

II. megoldás. Vizsgáljuk a mozgást az egyensúlyi helyzeten való áthaladás pillanatától (3. ábra). Az ütközés első fázisának végén az m_1 és az m_2 tömegű test egy pillanatig egyenlő c sebességgel mozog. Jelöljük $F(t)$-vel a pillanatról pillanatra változó nagyságú rugóerőt, és írjuk fel a forgómozgás alapegyenletét, valamint a lendületváltozás tételét:

$$m_2gr + F(t)r - MgR = \Theta\beta, \tag{10}$$

$$\sum[m_1 \cdot g - F(t)]\Delta t = m_1 \cdot (c - v_1). \tag{11}$$

(β az emelő szöggyorsulását jelöli.) Összegezzük (10)-t az első fázis t_1 idejére:

$$\sum(m_2 \cdot r - M \cdot R)g \cdot \Delta t + r\sum F(t)\Delta t = \Theta\omega = \Theta\frac{c}{r}. \tag{12}$$

(11) és (12) összevetéséből

$$\left(m_2g - Mg\frac{R}{r} + m_1g\right)t_1 = m_1(c - v_1) + \Theta\frac{c}{r^2}.$$

Az egyensúly (1) feltétele miatt a bal oldal nulla, így

$$c = \frac{v_1}{1 + \dfrac{\Theta}{mr^2}}. \tag{13}$$

Az ütközés második fázisára is felírhatjuk a hasonló egyenleteket, a forgás egyenletét mindjárt összegzett alakban:

$$(m_2gr - MgR)t_2 + \sum F(t) \cdot r \cdot \Delta t = \Theta(\omega - \omega'). \tag{14}$$

Kihasználva, hogy egy ideális rugónál $t_1 = t_2$, (14)-ből és (11)-ből, valamint az (1) egyensúlyi feltételből az M tömegű test sebességére

$$V = R \cdot \omega = \frac{2m_1 \cdot v_1 \cdot R \cdot r}{(m_1 + m_2)r^2 + MR^2}$$

adódik. A diszkusszió további része megyezik az I. megoldásával.

(Wiedemann László)