I. megoldás. Legyen a hidrogénatomok sebessége u, ennek a megfigyelő irányába eső vetülete

$$v = u \cdot \cos 45^\circ = u/\sqrt{2}.$$

A kibocsátott fény Doppler-eltolódást szenved. Feltételezve, hogy v elhanyagolható a fénysebességhez képest, a megváltozott f' és az eredeti f frekvencia kapcsolata:

$$f' = \frac{f}{1 \pm \dfrac{v}{c}}.$$

(c a fénysebesség.) Ebből és az $f = c/\lambda$, illetve $f' = c/\lambda'$ összefüggésekből a hullámhosszak kapcsolatára

$$\frac{c}{\lambda'} \pm \frac{v}{\lambda'} = \frac{c}{\lambda}$$

adódik, ahonnan az atomok sebessége

$$\pm v = c\left(\frac{\lambda'}{\lambda} - 1\right) = c \cdot \frac{\Delta\lambda}{\lambda}.$$

Az előjel, amely a sebesség irányától függ, nyilván érdektelen, így

$$u = \sqrt{2} \cdot c \cdot \frac{\Delta\lambda}{\lambda}.$$

A kérdéses hullámhossz kikereshető egy táblázatból, vagy kiszámítható az általánosított Balmer-formulából:

$$\frac{1}{\lambda} = R_{\mathrm{H}}\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2}\right).$$

Ebben $R_{\mathrm{H}} = 1{,}0968 \cdot 10^7\ \mathrm{m}^{-1}$ a hidrogénre vonatkozó Rydberg-állandó, a kvantumszámok pedig: $k = 1,\ n = 2$.

Mindezekből végül $u = 7 \cdot 10^5$ m/s érték adódik. Ez valóban sokkal kisebb, mint a fénysebesség, tehát jogosan használtuk a nemrelativisztikus Doppler-képletet.

II. megoldás. Tételezzük fel, hogy a H-atom u sebessége sokkal kisebb, mint a fénysebesség. Vizsgáljuk a hozzánk érkező hullám két egymás utáni azonos fázisú hullámfrontját; ezeket az *ábrán* k_1-gyel, illetve k_2'-vel jelöltük.

1988-04-186-1.eps

Amikor k_1 elindul, a H-atom az A pontban található. Ha helyben maradna, a következő (k_1-gyel azonos fázisú) hullámfront k_2 lenne. Mivel azonban a hullámforrás mozog, a ténylegesen megjelenő k_2' hullámfront középpontja nem A, hanem B. Az atom $1/f$ idő alatt $u/f = \overline{AB}$ utat tesz meg.

A sugárzás eredeti (álló sugárforráshoz tartozó) hullámhossza $\overline{CF}$, a rövidülése tehát $\overline{CE}$. Ha $\overline{CD}(= \overline{AB})$ sokkal kisebb, mint k_2 sugara (vagyis ha egy periódusidő alatt a fény sokkal nagyobb utat tesz meg, mint a H-atom, vagyis $u \ll c$), akkor ED közelítőleg érintő, azaz $CED\sphericalangle = 90^\circ$. Így

$$\Delta\lambda = \overline{CE} = \overline{CD} \cdot \cos\alpha = \overline{AB} \cdot \cos\alpha = \frac{u}{f}\cos\alpha = \frac{v}{\sqrt{2}f}.$$

Innen

$$u = \sqrt{2} \cdot f \cdot \Delta\lambda = \sqrt{2} \cdot c \cdot \frac{\Delta\lambda}{\lambda},$$

s a továbbiak megegyeznek az I. megoldással.