Helyezzük a fényforrást az $Oz$ tengely egy rögzített $S$ pontjába! Tekintsünk egy fénysugarat, amelyik az $A$ pontban lép a félgömbbe! Ez a pont jellemezhető az *1. ábrán* látható $\varphi$ szöggel.

1988-04-183-3.eps

*1. ábra*

A $\delta$ beesési szög

$$\delta = \varphi + \alpha.$$

A törési törvényből

$$\frac{\sin\delta}{\sin\beta} = n.$$

Ez a fénysugár érinteni fogja az $O$ középpontú, $\varrho = R\sin\beta$ sugarú kört.

Tekintsünk most két fénysugarat *(2. ábra)*!

1988-04-184-1.eps

*2. ábra*

Ha $\varphi < \varphi'$, akkor $\alpha < \alpha'$ és így $\delta < \delta'$. Ekkor a törési törvényből $\beta < \beta'$ következik. A második fénysugár így nagyobb $\varrho' = R\sin\beta'$ sugarú kört érint. Ez esetben az $AB$ és $A'B'$ nem metszheti egymást a félgömb belsejében, amiből rögtön következik, hogy $OB <$
$< OB'$.

Következésképpen rögzített $S$ mellett $\varphi$-t a lehető legnagyobbra kell választani. Ez akkor teljesül, ha az $S$-ből induló fénysugár éppen érinti a félgömböt. Ez esetben

$$\delta = 90^\circ; \tag{1}$$

valamint a törési törvény alapján

$$\sin\beta = \frac{1}{n}. \tag{2}$$

Írjuk fel a szinusztételt az $OBA$ háromszögre!

$$\frac{OB}{R} = \frac{\sin\beta}{\sin[180 - \beta - (90 - \varphi)]} = \frac{\sin\beta}{\cos(\beta - \varphi)}. \tag{3}$$

Ez az összefüggés adja meg, rögzített $S$ mellett, az alaplapon megvilágított kör $OB$ sugarát.

Ha azt vizsgáljuk, hogy $OB$ mely helyzetű $S$ pont esetén lesz minimális, akkor ez megfelel annak, ha $\varphi$-t változtatjuk $\delta = 90^\circ$ mellett. (3) alapján $OB$ minimális, ha $\cos(\beta - \varphi)$ maximális, vagyis $\beta = \varphi$. Innen rögtön adódik (2) felhasználásával, hogy:

$$OB = R\sin\beta = \frac{R}{n}. \tag{4}$$

A fényforrás helyzete $\beta = \varphi,\ \delta = 90^\circ$ esetén:

$$OS = \frac{R}{\cos\alpha} = \frac{R}{\cos\beta} = \frac{r}{\sqrt{1 - \sin^2\beta}} = \frac{Rn}{\sqrt{n^2 - 1}}. \tag{5}$$

*Összefoglalva:* Az alaplapon lévő kör területe minimális, ha $OS$ az (5)-nek megfelelő érték, a keresett terület pedig:

$$T_{\min} = \frac{R^2 \cdot \pi}{n^2}.$$