Írjuk fel az általános gáztörvényt az 1 molnyi ideális gáz kezdeti- és végállapotára:

(1) $$p_0V_0 = RT_0,$$
(2) $$pV = RT.$$

A $p-V$ diagramon akkor kapunk egyenest, ha p lineárisan függ V-től, vagyis

(3) $$p = p_0 + \alpha\cdot(V-V_0).$$

Az α állandóról az egyszerűség kedvéért tételezzük fel, hogy pozitív.

Ha a gázt T_0-ról T hőmérsékletűre melegítjük, a belső energiája $\Delta U = mc_V(T-T_0)$ értékkel változik, s közben $-W$ munkát végez a gáz. A tágulási munka a $p-V$ diagramon a görbe (jelen esetben az egyenes) alatti terület.

1988-04-180-1.eps

$$-W = \frac{p_0+p}{2}(V-V_0).$$

A hőtan első főtétele szerint a felvett hő

$$Q = \varDelta U - W,$$

vagyis

(4) $$Q = mc_V(T-T_0) + \frac{p_0+p}{2}(V-V_0).$$

A fenti összefüggés jobb oldalán – a kezdeti adatokon kívül – p, V és T egyaránt szerepel. Ezek a mennyiségek azonban nem függetlenek, hiszen (3) szerint V-ből p meghatározható, (2) pedig mindkettőjüket összekapcsolja a hőmérséklettel. (3)-t (2)-be helyettesítve V-re egy másodfokú egyenletet kapunk:

$$V^2 + \left(\frac{p_0}{\alpha} - V_0\right)V - \frac{RT}{\alpha} = 0,$$

melynek megoldása

(5) $$V(T) = \left(\frac{V_0}{2} - \frac{p_0}{2\alpha}\right) + \sqrt{\left(\frac{V_0}{2} - \frac{p_0}{2\alpha}\right)^2 + \frac{RT}{\alpha}}.$$

(Pozitív α esetén a négyzetgyök pozitív előjeléhez tartozik csak pozitív térfogat, negatív α esetén a helyzet bonyolultabb, ilyenkor az állapotváltozást jellemző egyenes bizonyos izotermákat kétszer is metsz, vagyis T nem határozza meg egyértelműen V-t és p-t.)

Az (5) összefüggést (3)-ba, majd mindkettőt (4)-be helyettesítve megkapjuk a keresett hőfelvétel-hőmérséklet kapcsolatot. Ez a függvénykapcsolat általában nem lineáris, Q *nem* arányos T megváltozásával, a folyamat fajhője tehát nem egy állandó szám, hanem a hőmérséklet függvényében változik. Kivételt csupán az $\alpha = 0$ (izobar) és az $\alpha = \infty$ (izochor) eset képez, ekkor $Q = (mc_V + R)(T-T_0) = mc_p(T-T_0)$, illetve $Q = mc_V(T-T_0)$.