I. megoldás. Tételezzük fel, hogy a pumpát és a tartályt összekötő csődarab térfogata elhanyagolhatóan kicsi, így a pumpa benyomásakor a benne levő összes levegő a tartályba kerül.

Jelöljük p_i-vel azt a nyomást, amely az i-edik pumpálás után alakul ki a tartályban (p_0 a külső légnyomás), és számoljuk ki p_i-ből p_{i+1}-t! Amikor a dugattyú járatában levő V_p térfogatú és p_0 nyomású levegőt elkezdjük összenyomni, a nyomás állandó térfogat mellett nő mindaddig, míg el nem éri p_i értékét (mindkét szelep zárva van). Jelöljük V_x-szel azt a térfogatot, amelyhez ez a nyomásérték tartozik. Mivel a hőmérséklet állandó

$$p_0 \cdot V_p = p_i \cdot V_x.$$

Mivel a nyomás a $p(V) = p_0 \cdot V_p \cdot \dfrac{1}{V}$ függvény szerint változik, az összenyomás ezen szakaszában a gázon végzett munka a $p(V)$ függvény görbe alatti területe,

$$W_{i+1}^{(1)} = -\int\limits_{V_p}^{V_x} p(V)dV = p_0 \cdot V_p \cdot \ln\frac{V_p}{V_x} = p_0V_p \cdot \ln\frac{p_i}{p_0}.$$

Az összenyomás második szakaszában (amikor az S_1 szelep már nyitva van), a levegő V_2+V_x térfogatról izotermikusan V_2 térfogatúra csökken:

$$(V_2+V_x) \cdot p_i = V_2 \cdot p_{i+1},$$

ahonnan

$$p_{i+1} = p_i + p_0 \cdot \frac{V_p}{V_2}.$$

Látható, hogy a nyomás mindig ugyanakkora értékkel növekszik, p_i-k számtani sorozatot alkotnak. Célszerű bevezetni a „sűrítési arányra” az

$$\varepsilon = \frac{V_p}{V_2}$$

jelölést, ezzel $p_{i+1} = p_i + \varepsilon \cdot p_0$, vagyis

$$p_i = p_0(1 + i \cdot \varepsilon).$$

Az $(i+1)$-edik pumpálás második szakaszában a végzett munka

$$W_i^{(2)} = -\int\limits_{V_2+V_x}^{V_2} p(V)dV = p_i(V_2+V_x) \cdot \int\limits_{V_2}^{V_2+V_x} \frac{1}{V}dV =$$

$$= (p_iV_2 + p_iV_x)\ln\left(1+\frac{V_x}{V_2}\right) = (p_0V_p + p_iV_2)\ln\left(1+\frac{V_p \cdot p_0}{V_2 \cdot p_i}\right).$$

A dugattyú $(i+1)$-edik összenyomása során a teljes munkavégzés

$$W_{i+1} = W_{i+1}^{(1)} + W_{i+1}^{(2)} = p_0V_p\left[\ln\frac{p_i}{p_0} + \left(1+\frac{p_iV_2}{p_0V_0}\right)\ln\left(1+\frac{p_0V_p}{p_iV_2}\right)\right] =$$

$$= p_0 \cdot V_2 \cdot \varepsilon \cdot \left[\ln(1+i\varepsilon) + \left(1+\frac{1+i\varepsilon}{\varepsilon}\right)\ln\left(1+\frac{\varepsilon}{1+i\varepsilon}\right)\right] =$$

$$= p_0 \cdot V_2\{[1+(i+1)\varepsilon]\ln[1+(i+1)\varepsilon] - (1+i\varepsilon)\ln(1+i\varepsilon)\}.$$

Mennyi munkát végzünk összesen a dugattyú n-szeri összenyomása során?

$$W_{\text{összes}} = \sum_{i=1}^{n} W_i = p_0V_2\{(1+\varepsilon)\ln(1+\varepsilon)+$$

$$+(1+2\varepsilon)\ln(1+2\varepsilon) - (1+\varepsilon)\ln(1+\varepsilon) + (1+3\varepsilon)\ln(1+3\varepsilon) - (1+2\varepsilon)\ln(1+2\varepsilon) + \ldots$$

$$\ldots + (1+n\varepsilon)\ln(1+n\cdot\varepsilon) - (1+n\varepsilon-\varepsilon)\ln(1+n\varepsilon-\varepsilon)\} =$$

$$= p_0V_2 \cdot \frac{p_n}{p_0} \cdot \ln\frac{p_n}{p_0}.$$

Ha az elérendő p nyomás éppen n pumpálási ciklus után alakul ki (tételezzük fel az egyszerűség kedvéért, hogy ez az n egész szám), akkor $p = p_n$ és a keresett munkavégzés

$$W = p \cdot V_2 \cdot \ln\frac{p}{p_0}.$$

II. megoldás. Legyen a V_2 térfogatú tartályban a folyamat végén N molekula! Mivel ezek kezdetben p_0, végül pedig p nyomású gázt alkotnak, az *entrópiájuk* a folyamat során

$$\Delta S = N \cdot k \ln \frac{p_0}{p}$$

értékkel változott meg (lásd a IV. osztályos tankönyv 40. oldalát). Mivel $p > p_0$, a gáz entrópiája csökkent, a rendszer rendezettebb állapotba került.

Igaz másrészt, hogy $\Delta S = \dfrac{Q}{T} + \sigma$, ahol Q a rendszer által felvett hő (T állandó hőmérsékleten), σ pedig az irreverzibilis folyamatok járuléka. Esetünkben $\sigma = 0$, továbbá $Q < 0$, hiszen az összenyomott gáz hőt ad le a környezetének.

Mivel a feltevéseink szerint a gáz hőmérséklete, s ezzel együtt a belső energiája a folyamat során változatlan maradt,

$$\Delta E = Q + W = 0,$$

így

$$W = -Q = -T \cdot \Delta S = -NkT \cdot \ln \frac{p_0}{p} = p \cdot V_2 \cdot \ln \frac{p}{p_0}.$$

Megjegyzés. A fentebb kiszámított W nem egyezik meg a gáz összenyomásához szükséges energiával, hanem nagyobb annál. A különbség onnan adódik, hogy a munka bizonyos hányadát a külső légnyomás „végzi"; a légsűrítőt működtetőnek csupán

$$W' = W - (p - p_0)V_2 = pV_2 \left[\ln \frac{p}{p_0} - \left(1 - \frac{p_0}{p} \right) \right]$$

munkát kell végeznie. Amennyiben $p \gg p_0$, úgy ez a különbség elhanyagolható, ha viszont nem törekszünk túlságosan nagy sűrítési arányra, úgy számottevő.