

Legyen p_0 és V_0 a kezdeti nyomás és térfogat, p_1 és V_1 pedig a végső.

1988-03-135-1.eps

a)

1988-03-135-2.eps

b)

A gáz a legmagasabb hőmérsékletet vagy a folyamat végén (a), vagy pedig a folyamat valamelyik közbenső pontjában (b) éri el. Azt, hogy a jelen esetben melyik eshetőség áll fenn, az 1000 K-es izoterma p_0, V_0 koordinátájú érintőjének vizsgálatából dönthetjük el. Ha az érintési ponthoz tartozó nyomás kisebb, mint p_1 , akkora b) eset teljesül, egyébként pedig az a).

Az AB szakasz egy tetszőleges pontjához tartozó nyomás

$$p = \alpha \cdot \Delta V + p_0,$$

ahol

$$\Delta V = V_0 - V_1, \quad \alpha = \frac{p_1 - p_0}{V_0 - V_1}.$$

Ezt a $pV = n \cdot R \cdot T$ gáztörvénybe helyettesítve V -re egy másodfokú egyenletet kapunk:

$$(1) \quad \alpha V_0 \cdot V + p_0 \cdot V - \alpha \cdot V^2 = n \cdot R \cdot T.$$

Ennek az egyenletnek $T = 1000$ K esetén csak egy megoldása lehet (hiszen az egyenes érinti az izotermát), a diszkrimináns tehát nulla kell legyen:

$$(2) \quad (\alpha V_0 + p_0)^2 - 4\alpha nRT = 0.$$

V_0 -t a gáztörvényből kaphatjuk meg:

$$V_0 = \frac{n \cdot R \cdot T_0}{p_0} = \frac{m}{M} \cdot \frac{R \cdot T_0}{P_0} = 0,227 \text{ m}^3.$$

Ezt és a többi adatot (2)-be helyettesítve α -ra két megoldást kapunk:

$$\alpha_1 = 5,5 \cdot 10^6 \text{ Pa/m}^3, \quad \alpha_2 = 3,5 \cdot 10^4 \text{ Pa/m}^3,$$

ami nem meglepő, hiszen az adott izotermához két érintőt is húzhatunk a p_0, V_0 pontból (c ábra).

1988-03-136-1.eps

c)

A két megoldás közül nekünk nyilván a meredekebbre van szükségünk, mert az tartozik az össznyomáshoz, a másiknál tágítani kellene a gázt ahhoz, hogy a p_0 nyomásról elindulva az 1000 K-es izotermát elérhessük. Ezt az α értéket (1)-be visszahelyettesítve és azt V -re megoldva, majd ebből az érintési ponthoz tartozó nyomást kiszámítva $1,8 \cdot 10^5$ Pa, tehát p_1 -nél kisebb érték adódik. Ezek szerint tehát a b) eset áll fenn.

A végső térfogat:

$$V_1 = V_0 - \frac{p_1 - p_0}{\alpha_1} = 0,063 \text{ m}^3.$$

Megjegyzések. 1. A rossz megoldások többsége azért hibás, mert feltételezi, hogy a gáz a folyamat végén éri el a legmagasabb hőmérsékletet.

2. A jó eredményt kiszámítók közül néhányan úgy szűrték ki a feladat szempontjából érdektelen α_2 -es meredekségű egyenest, hogy észrevették: az V_1 -re negatív számot adna! Ez az érvelés a feladat számadatai mellett tényleg alkalmazható, de azért legyünk óvatosak vele. Meg lehetne adni ugyanis olyan adatokat, melyekkel α_2 is pozitív V_1 -re vezetne, de mégsem lenne helyes a megoldás, hiszen az egyenes nem az AB szakasz belsejében érintené az 1000 K-es izotermát, így a gáz a folyamat során egyáltalán nem melegedne föl erre hőmérsékletre.