1. a) A leesés közben teljesül az energiamegmaradás törvénye, azaz (rögzített kocsinál):

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh + mgR\sin\alpha, \tag{1}$$

ahol α a test helyzetét jelző szög (*1. ábra*).

1988-01-044-1.eps

1. ábra

A körmozgás feltétele:

$$N - mg\sin\alpha = mv^2/R, \tag{2}$$

ahol N a golyó és a lejtő között ható kényszererő. A kocsi $F = Mg + N\sin\alpha$ erővel nyomja a földet, ami (1) és (2) felhasználásával

$$F = M\cdot g + mg\sin\alpha(2h/R + 3\sin\alpha). \tag{3}$$

Nyilvánvalóan látszik, hogy α növelésével az erő növekszik, és $\alpha = 90^\circ$-nál éri el a maximális $F = 330$ N értéket ($g = 10\ \mathrm{m/s^2}$).

1. b) Ha a kocsit nem rögzítjük, a helyzet jóval bonyolultabbá válik, de az erő legnagyobb értékét itt is az alsó pontban éri el.

1988-01-044-2.eps

2. ábra

Tekintsük az alsó pontbeli helyzetet (*2. ábra*). Itt is igaz az energiamegmaradás törvénye: $\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2 = mgh + mgR$, ahol v a test sebessége, V pedig a kocsi sebessége a talajhoz viszonyítva. Vízszintes irányban az összimpulzus zérus kell hogy legyen, hiszen kezdetben ennyi volt, és ilyen irányú külső erő nem hatott a rendszerre, vagyis (az ábra szerint választva az irányításokat)

$$MV = mv.$$

Ebben az esetben a test a kocsihoz képest végez körmozgást, és mivel a vizsgált pillanatban a kocsi már nem gyorsul, a kocsihoz rögzített koordináta-rendszer inerciarendszer. Ebben a rendszerben a körmozgás egyenlete:

$$N - mg = m(v+V)^2/R.$$

A megmaradási tételekből v és V értékét kiszámíthatjuk, s ezeket N képletébe helyettesítve az $F = Mg + N$ erőre végül 450 N adódik.

2. A test centripetális gyorsulása nem függ a vonatkoztatási rendszertől, így a földhöz viszonyított pálya r' görbületi sugarára a

$$v^2/r' = (v+V)^2/R$$

összefüggés érvényes. Ebből

$$r' = Rv^2/(v+V)^2 = 2/9\ \mathrm{m}.$$

Tóth Ildikó (Sárvár, Tinódi S. Gimn. II. o. t.) dolgozata alapján

Megjegyzés: Természetesen a mozgást leíró egyenletek tetszőleges α-ra felírhatóak, ekkor azonban figyelembe kell venni, hogy gyorsuló rendszerben vagyunk, s emiatt egy ma „tehetetlenségi erő" is fellép (*3. ábra*):

1988-01-045-1.eps

3. ábra

$N + ma\cos\alpha - mg\sin\alpha = m[(v_x+V)^2 + v_y^2]/R$ (*a kis test mozgásegyenlete*),
$\frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2) = mg(h + R\sin\alpha)$ (*energiatétel*),
$MV = mv_x$ (*impulzus-tétel*),
$(v_x+V)/v_y = \operatorname{tg}\alpha$ (*kényszerfeltétel*),

$$\left.\begin{aligned} N\cdot\cos\alpha &= M\cdot a \\ F = Mg &+ N\sin\alpha \end{aligned}\right\}\ \textit{(a kocsi mozgásegyenletei).}$$

Ezen egyenletek megoldásával belátható, hogy F maximuma valóban $\alpha = 90^\circ$-nál van, bár ez nem olyan egyszerű, mint az 1. esetben.