Az *1. ábrán* feltüntettük a vízszintessel α szöget bezáró rúdra, valamint a vízszintesen csúszó tömegpontra ható erőket. A rúd tömegközéppontja egy $l=\frac{L}{2}$ sugarú, A középpontú körpályán mozog.

1987-12-473-1.eps

1. ábra

Jelöljük a tömegközéppont A körüli pillanatnyi szögsebességét ω_1 -gyel és a rúdnak a tömegközéppontja körüli szöggyorsulását β_1 -gyel! A szögsebessége a tömegközéppontja körül ugyancsak ω_1.

Írjuk fel a rúd mozgásegyenleteit! A tömegközéppont gyorsulása és az erők közti kapcsolat:

(1) $$K-F=m(l\cdot\beta_1\cdot\sin\,\alpha-l\;\omega_1^2\cdot\cos\,\alpha),$$

(2) $$mg-N=(l\cdot\omega_1^2\cdot\sin\,\alpha+l\cdot\beta_1\cdot\cos\,\alpha),$$

ugyanis a tömegközéppont gyorsulása az $l\cdot\beta_1$ érintőleges és az $l\cdot\omega_1^2$ centripetális gyorsulás eredője.

A vízszintesen mozgó tömegpontra ugyancsak F nagyságú erő hat, s ha a gyorsulását a-val jelöljük, akkor a mozgásegyenlete

(3) $$F=m\cdot a.$$

A rúd forgását meghatározó egyenlet

(4) $$\theta\cdot\beta_1=N\cdot l\cdot\cos\,\alpha-(K+F)\cdot\sin\,\alpha,$$

ahol

$$\theta=\frac{1}{12}m(2l)^2=\frac{1}{3}m\cdot l^2$$

a rúd tehetetlenségi nyomatéka a tömegközéppontjára vonatkoztatva.

Mivel a rúd alsó vége érintkezik az m tömegű tömegponttal, ennek a pontnak a vízszintes irányú sebessége és a gyorsulása meg kell egyezzék a tömegpont sebességével és gyorsulásával. A rúd alsó végpontjának vízszintes irányú sebessége a tömegközéppont $l\cdot\omega_1$ sebességének $l\cdot\omega_1\cdot\sin\,\alpha$ vízszintes összetevőjéből és a forgómozgásból származó $l\cdot\omega_1$ kerületi sebesség megfelelő vetületéből tehető össze:

(5) $$v=2\cdot l\cdot\omega_1\cdot\sin\,\alpha.$$

Hasonló módon kaphatjuk meg, hogy a rúd alsó végének, s ezzel együtt a tömegpontnak a gyorsulása

(6) $$a=2\cdot l\cdot(\beta_1\cdot\sin\,\alpha-\omega_1^2\cdot\cos\,\alpha).$$

(Az (5) és (6) egyenleteket a differenciálszámítás segítségével is megkaphatjuk, ha képezzük a tömegpont helyét megadó $x=2\cdot l\cdot\cos\,\alpha$ függvénynek az idő szerinti első, illetve második deriváltját. Figyelem: $\Delta\alpha/\Delta t=-\omega_1$!)

Használjuk fel a mechanikai energia megmaradásának törvényét is! A helyzeti energia nulla szintjét a talajszinten rögzítve:

(7) $$m\cdot g\cdot l=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}m\cdot l^2\cdot\omega_1^2+\frac{1}{2}m\cdot(2\cdot l\cdot\omega_1\sin\,\alpha)^2+m\cdot g\cdot l\cdot\sin\,\alpha.$$

A fenti egyenlet jobb oldalának első tagja a rúd teljes mozgási energiája, a második tag pedig a tömegpont energiája.

Az (1)–(7) egyenletrendszer segítségével tetszőleges α szögre kiszámíthatjuk az F, K, N erőket, valamint a v, a, ω_1 és β_1 mennyiségeket. Ez a megoldás azonban nem alkalmas a rendszer mozgásának teljes leírására, hanem csak addig érvényes, amíg az F, K és N erők mindegyike pozitív. (Negatív erő húzásnak felelne meg, s erre sem a fal, sem pedig a talaj nem képes!)

Az (1), (3) és (6) egyenleteket összevetve leolvashatjuk, hogy minden pillanatban fennáll a

$$K=\frac{3}{2}F$$

összefüggés, ami azt jelenti, hogy ha valamikor megszűnik a rúd és a fal közti nyomóerő, ugyanabban a pillanatban a rúd és a tömegpont közötti erő is nullává válik. (Részletesebb diszkusszió azt mutatja, hogy N a mozgás során mindvégig pozitív marad, vagyis a rúd alsó vége nem emelkedik fel a talajról.)

Határozzuk meg, hogy a rúd milyen helyzeténél válhat K és F nullává! Az $(1)-(7)$ egyenletekből N, ω_1, β_1, v és a kiküszöbölése után végül α-ra kapunk egy egyenletet:

(8) $$3\;\sin^3\,\alpha+3\;\sin\,\alpha-2=0.$$

Ezt az egyenletet próbálgatással, vagy grafikusan megoldva az α_0 gyökre

$$\sin\,\alpha_0 = 0,523 \quad \text{azaz} \quad \alpha_0 = 31,6^\circ$$

adódik. Ennél a szögnél a rúd elválik a függőleges faltól, s a tömegpont is elszakad a rúdtól. Mivel a továbbiakban vízszintes irányú erők nem hatnak, mindkét test megtartja az elszakadás pillanatához tartozó vízszintes irányú sebességét (a rúdnál ez természetesen a tömegközéppontra vonatkozik). Elvileg elképzelhető lenne, hogy egy későbbi időpontban a rúd felső vége nekiütközik a falnak, vagy az alsó vége utoléri a tömegpontot, de a részletesebb vizsgálat azt mutatja, hogy ezek egyike sem következik be. Az egyenletrendszer megoldásából a numerikus adatok behelyettesítése után $v = 2,05$ m/s érték adódik; ekkora sebességgel távozik jobb felé a kis test.

1987-12-475-1.eps

2. ábra

A rúd további mozgását a *2. ábrán* látható erők szabják meg. A rúd szöggyorsulását β_{II} -vel, tömegközéppontjának függőleges gyorsulását pedig a_{II} -vel jelölve a mozgásegyenletek:

(9) $$m \cdot g - N = m \cdot a_{II},$$

(10) $$N \cdot l \cdot \cos\alpha = \theta\beta_{II},$$

s ehhez járul még egy kényszerfeltétel, amelyik azt fejezi ki, hogy a rúd alsó végpontjának függőleges gyorsulása nulla:

(11) $$a_{II} = l \cdot \beta_{II} \cdot \cos\,\alpha + l \cdot \omega_{II}^2 \cdot \sin\,\alpha.$$

A rúd szögsebességét ismét az energia-tétel segítségével számíthatjuk ki:

(12) $$m \cdot g \cdot l \cdot \sin\,\alpha + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}m \cdot l^2\right) \cdot \omega_{II}^2 + \frac{1}{2}m \cdot (l \cdot \omega_{II} \cos\,\alpha)^2 =$$
$$= mgl \cdot \sin\,\alpha_0 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ml^2\right)\omega_0^2 + \frac{1}{2}m(l\omega_0 \cos\,\alpha_0)^2.$$

A bal oldal első tagja a helyzeti energia, a második tag az ω_{II} szögsebességű rúd forgási energiája, a harmadik pedig a függőleges irányú tömegközépponti mozgáshoz rendelhető energia; a jobb oldalon ugyanezeket találjuk a faltól való elszakadás pillanatában. (A vízszintes irányú mozgás energiáját nem szükséges felírnunk, hiszen az időben állandó mennyiség.)

A (9)–(12) egyenletrendszert megoldva azt találjuk, hogy N mindvégig pozitív, tehát a rúd alsó vége nem emelkedik föl a talajról. Ha a mozgás részletesebb leírása helyett csupán arra vagyunk kíváncsiak, hogy mekkora sebességgel érkezik a rúd felső vége a talajhoz, akkor a (12) egyenletből $\alpha = 0$ esetén meghatározhatjuk a rúd $\omega_{\max}$ szögsebességét, s ebből a „felső" vég sebességére

$$v_{\max} = 2 \cdot l \cdot \omega_{\max} = 6,56 \text{ m/s}$$

adódik.