I. Megoldás. Vegyük fel a koordináta-rendszerünket az *1. ábrának* megfelelően.

1987-11-425-2.eps

A golyót v_0 kezdősebességgel, α szöggel elindítva a pályára a következő paraméteres egyenletet kapjuk:

$$x = v_0 t \cos\alpha,$$
$$y = v_0 t \sin\alpha - \frac{g}{2}t^2,$$

ahonnan

(1) $$y = x\cdot \operatorname{tg}\alpha - x^2\frac{g}{2v_0\cos^2\alpha}.$$

A lejtő egyenlete:

(2) $$y = x\cdot \operatorname{tg} 30^\circ.$$

Az (1)–(2) egyenletrendszer megoldása y-ra megadja a h ütközési magasságot:

(3) $$h = \frac{\sqrt{3}\cdot 2v_0^2\cos^2\alpha(3\operatorname{tg}\alpha-\sqrt{3})}{9g}.$$

A hajítás során a sebesség vízszintes komponense nem változik, így az ábra jelölésének megfelelően

(4) $$v_x = v_0\cdot\cos\alpha.$$

Az ábráról leolvasható, hogy

(5) $$\cos\delta = \frac{v_x}{v}.$$

Az ütközés rugalmas, így $\gamma_1 = \gamma_2$, másrészt a lejtő hajlásszöge és γ_2 merőleges szárú szögek, s így egyenlőek. Mindezek alapján

(6) $$\delta = 30^\circ.$$

A (4), (5) és (6) egyenleteket összevetve

(7) $$v = \frac{2v_0\cos\alpha}{\sqrt{3}}$$

adódik.

Az energiamegmaradás tétele értelmében fennáll, hogy

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgh + \frac{1}{2}mv^2,$$

amelybe a (3)-as és (7)-es kifejezéseket behelyettesítve α-ra az alábbi egyenletet kapjuk:

$$\sin 2\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ennek megoldásai:

$$\alpha_1 = 30^\circ \quad \text{és} \quad \alpha_2 = 60^\circ.$$

A fizikai szempontból értelmes eredmény:

$$\alpha = 60^\circ.$$

II. Megoldás. Ejtsünk egy golyót merőlegesen a lejtőre! Ekkor (amennyiben a légellenállást, s általában a sebességtől, a mozgás irányától függő, úgynevezett nem konzervatív erőket elhanyagoljuk) a golyó pontosan azt a pályát fogja visszafelé befutni, amelyet keresünk. A kérdést tehát így is feltehetjük: milyen szögben érkezik a golyó a lejtő aljához?

1987-11-427-1.eps

A *2. ábra* jelölései szerint $\gamma_1 = 30^\circ$, mivel merőleges szárú szögpárt alkot a lejtők hajlásszögével, továbbá $\gamma_1 = \gamma_2$, hiszen az ütközés rugalmas. Így $\alpha = 30^\circ$-os, v_0 kezdősebességű hajításnak felel meg a feladat. Felírva az út–idő függvényeket:

$$y = \frac{g}{2}\,t^2 - v_0 \sin 30^\circ \cdot t,$$
$$x = v_0 \cdot \cos 30^\circ \cdot t,$$

s felhasználva, hogy

$$\frac{h}{l} = \operatorname{tg} 30^\circ,$$

a talajra érkezés időpontja

$$t = \frac{2v_0}{g}.$$

A golyó sebességének vízszintes összetevője állandó. A függőleges komponens értéke az ütközés pillanatában:

$$v_y = v_0 \sin 30^\circ - gt = \frac{3}{2} v_0,$$

ahonnan

$$\operatorname{tg} \beta - \frac{v_y}{v_x} = \sqrt{3},$$
$$\beta = 60^\circ.$$