Először egy egyszerűbb feladatot oldunk meg, melynek eredményéből azonban könnyen adódik az eredeti probléma megoldása is. Tekintsünk egy 2φ nyílásszögű kúpot, amelynek alapköre r sugarú és m tömegű vékony korong, a kúp többi része pedig elhanyagolható tömegű. Mekkora ezen test mozgási energiája, ha egy vízszintes lapon csúszásmentesen gördül, s az alapkörének középpontja ω szögsebességgel mozog?

1987-11-416-2.eps

1. ábra

A korong S tömegközéppontja az *1. ábrán* látható O pont körül ω szögsebességgel mozog, s mivel az $\overline{OS}$ szakasz hossza

$$s=\overline{AS}\cdot\cos\,\varphi=r\cdot\mathrm{ctg}\,\varphi\cdot\cos\,\varphi,$$

a tömegközéppont sebessége

$$v=r\cdot\omega\cdot\frac{\cos^2\varphi}{\sin\,\varphi}.$$

A korong haladó mozgásához tartozó mozgási energia eszerint

$$E_1=\frac{1}{2}m\cdot v^2=\frac{1}{2}m\cdot r^2\omega^2\frac{\cos^4\varphi}{\sin^2\varphi}.$$

A korong a haladó mozgás mellett forgómozgást is végez. Ez a mozgás két részből tevődik össze. Egyrészt a korong forog a szimmetriatengelye körül bizonyos ω_1 szögsebességgel. Mivel az asztallapon éppen nyugvó B pont sebessége – amely a tömegközéppont v és a forgómozgás $r\cdot\omega_1$ sebességének különbségeként számítható ki – nyilvánvalóan nulla kell legyen,

$$\omega_1=\frac{v}{r}=\omega\cdot\frac{\cos^2\varphi}{\sin\,\varphi}$$

adódik.

1987-11-417-1.eps

2. ábra

Rajzoljuk le a kúpot felülnézetben *(2. ábra)!* Amennyiben a kúp csupán haladó és a szimmetriatengelye körüli forgómozgást végezne, úgy egy kicsiny Δt idő alatt a kúp csúcspontja A-ból A'-be, az eredeti helyétől $v\cdot\Delta t$ távolságba mozdulna el. A valóságban a kúp az SB tengely körül is elfordul, méghozzá pontosan annyit, hogy a csúcspont mozdulatlan maradjon; ez teszi lehetővé a „kanyarodását”. Ha ezen forgás szögsebességét ω_2-vel jelöljük, akkor a csúcspont helybenmaradásának feltétele

$$v\cdot\Delta t-\omega_2\cdot\Delta t\cdot\overline{AS}=0,$$

ahonnan $\overline{AS}=r\cdot\mathrm{ctg}\,\ \varphi$ felhasználásával

$$\omega_2=\omega\cdot\cos\,\ \varphi$$

adódik.

1987-11-417-2.eps

3. ábra

Mekkora a korong forgási energiája? Ha egy homogén korongot a szimmetriatengelye körül ω_1, az egyik átmérője körül pedig ω_2 szögsebességgel forgatunk, akkor a *3. ábrán* látható M_i tömegű darabkájának mozgási energiája

$$E_i=\frac{1}{2}M_iv_i^2=\frac{1}{2}M_i\big[(x_i^2+y_i^2)\cdot\omega_1^2+y_i^2\cdot\omega_2^2\big].$$

(Kihasználtuk, hogy a kétféle mozgásból adódó sebességek merőlegesek egymásra, így a sebességek négyzetei a Pithagorász-tétel értelmében adódnak össze.) A korong teljes forgási energiája

$$E_2=\sum_i E_i=\frac{1}{2}\omega_1^2\big[\sum_i M_i(x_i^2+y_i^2)\big]+\frac{1}{2}\omega_2^2\big[\sum_i M_iy_i^2\big].$$

A fenti egyenlet első szögletes zárójelében éppen a korongnak a szimmetriatengelyére vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatéka, vagyis $\theta_1=\dfrac{1}{2}\cdot m\cdot r^2$ áll, a második szögletes zárójelben pedig ennek fele: $\theta_2=\dfrac{1}{4}\cdot m\cdot r^2$. (Ez utóbbi az x és az y tengelyek felcserélhetőségéből, a $\varSigma M_ix_i^2=\varSigma M_iy_i^2$ egyenlőségből következik.)

A kúp teljes mozgási energiája eszerint:

$$E = E_1 + E_2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\theta_1 \cdot \omega_1^2 + \frac{1}{2}\theta_2 \cdot \omega_2^2,$$

ami a korábbi részeredmények felhasználásával

$$E = \frac{1}{2}m \cdot r^2\omega^2 \cdot \frac{\cos^4\varphi}{\sin^2\varphi} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}mr^2 \cdot \omega^2 \cdot \frac{\cos^4\varphi}{\sin^2\varphi} +$$
$$+\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}mr^2 \cdot \omega^2 \cos^2\varphi = \left(\frac{1}{2}mr^2\right) \cdot \omega^2 \cdot \left(\frac{3}{2}\frac{\cos^4\varphi}{\sin^2\varphi} + \frac{1}{4}\cos^2\varphi\right).$$

Térjünk most vissza az eredeti probléma megoldásához! Szeleteljük fel képzeletben a homogén kúpot a szimmetriatengelyére merőleges síkok segítségével vékony korongokra!

1987-11-418-1.eps

4. ábra

A korongok tömegét m_i-vel, sugarát pedig r_i-vel jelölve *(4. ábra)*, a gördülő kúp teljes mozgási energiája a fentebb vizsgált feladat eredményének felhasználásával:

$$E = \left\{\sum_i \frac{1}{2}m_i r_i^2\right\} \cdot \omega^2 \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{\cos^4\varphi}{\sin^2\varphi} + \frac{1}{4}\cos^2\varphi\right).$$

A kapcsos zárójelben álló kifejezés – az egyes korongok tehetetlenségi nyomatékainak összege – a feladat kitűzésénél megadott $\theta = 3 \cdot M \cdot R^2/10$ érték, így a keresett mozgási energia

$$E = \frac{3}{10}M \cdot R^2 \cdot \omega^2 \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{\cos^4\varphi}{\sin^2\varphi} + \frac{1}{4}\cos^2\varphi\right) =$$
$$= \frac{3 \cdot M \cdot R^2 \cdot \omega^2 \cdot \cos^2\varphi}{40 \cdot \sin^2\varphi}(6 \cdot \cos^2\varphi + \sin^2\varphi).$$