A feladat szövegéből nem derül ki, hogy hogyan áll a kúp, „szájával” felfelé, vagy pedig lefelé (*1. és 2. ábra*). A két esetben alapvetően különböző eredményt kapunk, ezért külön-külön vizsgáljuk őket.

1987-09-276-1.eps

1. ábra

1987-09-276-2.eps

2. ábra

Tekintsük az 1. ábrának megfelelő esetet! Az ábrán láthatók a testre ható erők. Az $r = d \cdot \sin\alpha$ sugarú körpályán mozgó test gyorsulása $\omega^2 \cdot r$, iránya a kör középpontja felé mutat. Az m tömegű test mozgásegyenletei:

$$N \cdot \sin\alpha + S \cdot \cos\alpha = m \cdot g, \tag{1}$$

$$N \cdot \cos\alpha - S \cdot \sin\alpha = m \cdot r \cdot \omega^2, \tag{2}$$

$$S \le \mu \cdot N. \tag{3}$$

Az utolsó egyenlet a tapadás feltételét fejezi ki.

1987-09-277-1.eps

3. ábra

Az (1) és (2) egyenletekből N és S kifejezhető, majd ezeket (3)-ba írva a szögsebességre egy egyenlőtlenséget kapunk:

$$\omega \ge \sqrt{\frac{g}{r} \cdot \frac{\cos\alpha - \mu \cdot \sin\alpha}{\sin\alpha + \mu \cdot \cos\alpha}} = \omega_1(\alpha). \tag{4}$$

A súrlódási erő irányát úgy vettük fel, hogy a testnek a paláston való lecsúszását akadályozza, (4) tehát annak a feltétele, hogy a test ne csúszhasson meg lefelé.

Elképzelhető az is, hogy elegendően nagy ω-nál a test a paláston felfelé kezd el csúszni. Ekkor S iránya az előzőekhez képest ellentétes, tehát az (1) és (2) egyenletekben S helyébe $-S$ írandó. Ismét kifejezhetjük az erőket, s a tapadási feltételből a szögsebességre az

$$\omega \le \sqrt{\frac{g}{r} \cdot \frac{\cos\alpha + \mu \cdot \sin\alpha}{\sin\alpha - \mu \cdot \cos\alpha}} = \omega_2(\alpha). \tag{5}$$

megszorítást kapjuk.

Elemezzük a kapott eredményeket! A (4) egyenlőtlenség azt jelenti, hogy $\omega \ge \omega_1(\alpha)$ szögsebességnél a test nem kezd lefelé csúszni, míg (5) szerint $\omega \le \omega_2(\alpha)$ esetén a test nem csúszik felfelé. Másrészt (4) és (5) csak akkor adnak értelmes korlátokat, ha a gyökjel alatt pozitív kifejezés áll, vagyis ha $\operatorname{ctg}\alpha \ge \mu$ és $\operatorname{tg}\alpha > \mu$.

Vezessük be az $\alpha_1 = \operatorname{arc\,ctg}\mu$ és az $\alpha_2 = \operatorname{arc\,tg}\mu$ jelöléseket! Ha $\alpha > \alpha_1$, akkor $\omega_1(\alpha)$ nincs értelmezve, másrészt még $\omega = 0$-nál sem csúszik le a test. Ugyanakkor ω nem lehet nagyobb $\omega_2(\alpha)$-nál, mert különben a test felfelé kicsúsznék a kúpból. A stabil egyensúly feltétele: $\alpha > \alpha_1$ és $0 \le \omega \le \omega_2(\alpha)$.

Ha $\alpha < \alpha_1$ ($\operatorname{ctg}\alpha < \mu$), akkor $\omega < \omega_1(\alpha)$-nak kell teljesülnie ahhoz, hogy a test ne csússzék le a kúpon, de a szögsebesség most sem lehet nagyobb $\omega_2(\alpha)$-nál. Tegyük fel, hogy $\alpha_2 < \alpha < \alpha_1$, ekkor létezik „kritikus felső szögsebesség”, s az egyensúly feltétele $\omega_1(\alpha) \le \omega \le \omega_2(\alpha)$.

Ha $\alpha < \alpha_2$, akkor az alsó kritikus érték, $\omega_1(\alpha)$ értelmezve van, és $\omega < \omega_1(\alpha)$-nál lecsúszik a test, a felső határ viszont nem létezik, ami annyit jelent, hogy a test felfelé semilyen ω értéknél sem csúszhat meg.

Végül vizsgáljuk meg az $\alpha = 90^\circ$-os speciális esetet! Könnyen belátható, hogy $S = m \cdot d \cdot \omega^2$ és $N = m \cdot g$, így $\omega \le \sqrt{\dfrac{\mu \cdot g}{d}}$-nél nem csúszik meg a test.

A fenti eredményeket célszerű egy „állapotdiagramon” szemléltetni. Mérjük fel a vízszintes koordinátatengelyre a kúp szögsebességét, a függőleges tengelyre pedig a félnyílásszögét! Rögzített $\mu = 0{,}5$ és $\mu = 0{,}1$ súrlódási együtthatók mellett felrajzoltuk az $\omega_1(\alpha)$ „alsó kritikus”, illetve az $\omega_2(\alpha)$ „felső kritikus” szögsebesség görbéjét $\sqrt{g/d}$ egységekben. (r helyébe $d \cdot \sin\alpha$-t írtunk és a görbék pontjait számítógéppel határoztuk meg.) A diagram segítségével tetszőleges α és ω esetén megállapíthatjuk, hogy a test nyugalomban van-e illetve ha nem, akkor melyik irányba mozdul el (4/a és 4/b ábra).

1987-09-278-1.eps

4/a ábra

1987-09-278-2.eps

4/b ábra

Térjünk át a szájával lefelé álló kúpon levő test stabilitásának vizsgálatára! Az erőviszonyokat a *2. ábra* mutatja. Ismét felírhatjuk a mozgásegyenleteket és a tapadás feltételét:

$$N\cdot\sin\alpha+S\cdot\cos\alpha=m\cdot g, \tag{6}$$

$$-N\cdot\cos\alpha+S\cdot\sin\alpha=m\cdot r\cdot\omega^2, \tag{7}$$

$$S\leqq\mu\cdot N. \tag{8}$$

A (6) és (7) egyenletekből N-t kifejezve:

$$N=m\cdot g\cdot\sin\alpha-m\cdot r\cdot\omega^2\cdot\cos\alpha, \tag{9}$$

majd a súrlódási erőt is meghatározva és (8)-ba helyettesítve a szögsebességre az

$$\omega\le\sqrt{\frac{g}{r}\cdot\frac{-\cos\alpha+\mu\sin\alpha}{\sin\alpha+\mu\cos\alpha}}=\omega_3(\alpha) \tag{10}$$

megszorítást kapjuk. Ha $\omega=0$, akkor $\mu\ge\operatorname{ctg}\alpha$, vagyis $\alpha\ge\alpha_1$ az egyensúly feltétele; $\omega\ne0$-nál (de még mindig $\alpha>\alpha_1$-nél) viszont $\omega\le\omega_3(\alpha)$ a stabilitás feltétele.

Amennyiben $\alpha<\alpha_1$, akkor a test már $\omega=0$ értéknél is lecsúszik, tehát semmilyen más szögsebességnél sem lehet egyensúlyban.

Túlságosan nagy ω értéknél az is előfordulhat, hogy N értéke negatívvá válik, ami annyit jelent, hogy a test elválik a kúp palástjától, „elszáll”. A (9) összefüggésből kiszámíthatjuk azt a kritikus szögsebességet, amelynél N éppen nullává válik:

$$\omega_4(\alpha)=\sqrt{\frac{g}{r}\cdot\operatorname{tg}\alpha}. \tag{11}$$

Ebből látszik, hogy minden α szöghöz tartozik egy felső kritikus szögsebesség, amely fölött a test nem maradhat a kúpon.

A lefelé szélesedő kúpnál is megrajzolhatjuk az állapotdiagramot (5/a és 5/b *ábra*).

1987-09-279-1.eps

5/a ábra

1987-09-279-2.eps

5/b ábra

(Ismét két különböző súrlódási együtthatóra végeztük el a számítást.) Az ábrákról leolvasható, hogy a súrlódás csökkenésével „beszűkül” a stabil tartomány.

Megjegyzés: Teljesen jó megoldás nem érkezett. Több megoldó észrevette, hogy a feladat nincs egyértelműen megfogalmazva, de teljes diszkussziót nem adtak. Azok, akik elkezdték elemezni a különböző eseteket, de hiányos a megoldásuk, 4 pontot kaptak. Akik a fenti esetek valamelyikét vizsgálták csak, 3 pontot szereztek. Sok hibás dolgozat született a centripetális erővel kapcsolatos fogalmi zavarok miatt.