

Vizsgáljuk meg, milyen erők ébrednek, ha a rendszer a feladatban leírtak szerint mozog.

1987-05-233-2.eps

1. ábra

Az erőket és a gyorsulásokat az ábrán látható módon felvéve a henger mozgásegyenletei:

$$(1) \quad M \cdot g + K - S \cdot \sin \alpha - N \cdot \cos \alpha = M \cdot a_y = 0,$$

$$(2) \quad S \cdot \cos \alpha - N \cdot \sin \alpha = M \cdot a_x = 0.$$

A tömegközéppont körüli forgás egyenlete:

$$(3) \quad \Theta \cdot \beta = K \cdot r - S \cdot r. \quad (\Theta = \frac{1}{2}Mr^2.)$$

Az  $m$  tömegű test mozgásegyenlete:

$$(4) \quad m \cdot a = m \cdot g - K.$$

(Ez az egyenlet ilyen formában csak akkor érvényes, ha a fonál függőleges, vagyis ha a henger középpontja nem mozdul el.) Mivel a henger palástja csúszik a lejtő felületén, a súrlódási erő

$$(5) \quad S = \mu \cdot N.$$

A fonál nyújthatatlansága kényszerfeltételt jelent  $a$  és  $\beta$  között:

$$(6) \quad a = r \cdot \beta.$$

Fel kell tételoznünk továbbá, hogy a henger az ábrán jelölt irányba forog, azaz

$$(7) \quad r\beta = a \geq 0,$$

ellenkező esetben ugyanis  $S$  nem az (5) által megadott érték, hanem annak  $(-1)$ -szerese lenne.

A (2) és (5) egyenletek összevetéséből

$$(8) \quad \frac{S}{N} = \mu = \operatorname{tg} \alpha$$

adódik, tehát csak pontosan ekkora súrlódási együttható mellett valósulhat meg a henger egy helyben forgása.  $\mu > \operatorname{tg} \alpha$  vagy  $\mu < \operatorname{tg} \alpha$  esetén a henger gyorsulva elindul fel-, illetve lefelé, ekkor azonban a fonál nem marad függőleges, és a fenti egyenletekkel a rendszer mozgását nem tudjuk leírni.

Az (1)–(6) egyenletrendszert megoldva az  $m$  tömegű test gyorsulására az

$$(9) \quad a = \frac{m(1 - \sin \alpha) - M \sin \alpha}{m(1 - \sin \alpha) + M/2} \cdot g$$

kifejezést kapjuk. Az  $a \geq 0$  feltétel csak akkor teljesül, ha

$$(10) \quad \frac{m}{M} \geq \frac{\sin \alpha}{1 - \sin \alpha}, \quad \text{azaz} \quad \frac{m}{m + M} \geq \sin \alpha.$$

(Egyenlőség esetén csak akkor jön létre egyenletes mozgás, ha a rendszert kezdetben mozgásba hozzuk.) A (10) feltétel jól egyezik a szemléletünkkel: minél meredekebb a lejtő, annál nagyobbak kell lennie  $m$ -nek  $M$ -ha képest, hogy létrejöhessen a leírt mozgás.