A $t=0$ pillanatban a függőlegeshez képest α szögben, v_0 kezdősebességgel elinduló vízcseppek mozgását az

$$y(t)=v_0\cdot t\cdot \cos\,\alpha-g\cdot t^2/2$$

és az

$$x(t)=v_0\cdot t\cdot \sin\,\alpha$$

egyenletek írják le. (Ezek az egyenletek tulajdonképpen csak a szabadon mozgó, már cseppekre szakadt vízsugárra érvényesek, a kifolyócső közelében még nem; – ott az egyes folyadékdarabkák a környező folyadék hatását is érzik, ezt azonban a továbbiakban elhanyagoljuk.)

A földetéréskor $y=0$, ahonnan a repülés idejére

$$t^*=\frac{2v_0}{g}\cos\,\alpha,$$

a repülés távolságára pedig

$$X=x(t^*)=\frac{v_0^2}{g}\sin\,2\alpha$$

adódik. Egy tetszőleges t időpillanatban elinduló vízcsepp $T=t+t^*$ időpillanatban ér földet, azaz

(1) $$T(t)=t+\frac{2v_0}{g}\cdot\cos\,\alpha(t),$$

repülés távolsága pedig

(2) $$X(t)=\frac{v_0^2}{g}\cdot\sin\,2\alpha(t).$$

A fenti két egyenlet az

(3) $$\alpha(t)=A\sin\left(2\pi t/t_0\right)$$

függvényalakkal együtt egyértelműen meghatározza a keresett $X(T)$ függvényt. A grafikus ábrázolás ténylegesen úgy történik, hogy kiszámítjuk különböző t értékekhez tartozó X és T mennyiségeket, és ezeket egy derékszögű koordinátarendszer tengelyeire felmérve az így kapott pontokat összekötjük. (Az ilyenfajta függvénymegadást, vagyis amikor X-et nem közvetlenül a független változó T-ből számítjuk ki, hanem mindkettőjüket egy harmadik mennyiségből, t-ből származtatjuk, *paraméteres alak*nak nevezik. A paraméteres függvényalaknak az az előnye, hogy vele „többértékű” függvények is megadhatók.)

Gyorsítja a függvényábrázolást az, ha észrevesszük, hogy az $X(T)$ függvény periodikus t_0 periódusidővel, tehát $X(T+t_0)=X(T)$, továbbá fennáll az $X(T+t_0/2)=-X(T)$ összefüggés is. Ez utóbbi miatt elegendő egy félperiódusra, tehát 1,5 s-nyi időtartamra szorítkoznunk, ezt pedig mondjuk 15 pontban, vagyis 0,1 s-onként számolva kielégítő pontossággal megkapjuk az X(T) függvény (1. ábra).

1987-04-187-1.eps

1. ábra

Látható, hogy $X(T)$ bizonyos időintervallumokban nem egyértékű, hanem három különböző értéket felvevő függvény. Ez azzal függ össze, hogy a különböző időpontokban – különböző irányokban – elindított vízcseppek egyszerre érhetik el a földet. Amennyiben a földetérés helyén szétfröccsenő vízfoltot egy „részecskének” tekintjük, amely vízszintesen mozog, úgy az 1. ábrát tanulmányozva azt a meglepő kijelentést tehetjük, hogy ezen részecskék száma nem állandó, hanem néha megváltozik. Az A, $A^{'}$, $A^{''}$, … pontoknak megfelelő pillanatokban hirtelen két új – eddig nem létező – részecske „keletkezik”, majd nagy sebességgel eltávolodik egymástól. A B, $B^{'}$, $B^{''}$, … pontoknál viszont egy-egy részecske egymásnak ütközik, s mindkettő „eltűnik”, annihilálódik. Ez a jelenség bizonyos értelemben jól modellezi az elemi részecskék és antirészecskéik (például elektronok és pozitronok) párosával történő keletkezését és annihilálódását.

Az $X(T)$ út–idő függvényből a sebességet a függvény meredekségének vizsgálatából kaphatjuk meg. Ez történhet az 1. ábrán látható görbe „grafikus deriválásával” (vagyis a meredekség pontonkénti lemérésével és ábrázolásával), vagy a (2), (3) és (4) egyenletekből a

$$\frac{\Delta X}{\Delta T}=\frac{\Delta X(t)}{\Delta T}\bigg/\frac{\Delta T(t)}{\Delta t}=$$

$$=\frac{\frac{v_0^2}{g}[\cos 2\alpha(t)]\cdot 2A[\cos(2\pi t/t_0)]\cdot 2\pi/t_0}{1-\frac{2v_0}{g}[\sin\alpha(t)]\cdot A[\cos(2\pi\cdot t/t_0)]\cdot 2\pi/t_0}$$

összefüggés segítségével. A sebességfüggvény ugyancsak többértékű függvénye T-nek (2. ábra).

1987-04-188-1.eps

2. ábra

Az $A,\ A^{'},\ A^{''},\ \dots$ keletkezési – és a $B,\ B^{'},\ B^{''},\ \dots$ megsemmisülési pontokban a sebesség határértéke végtelen nagy. Ez azonban nincs ellentmondásban a relativitáselmélet azon állításával, miszerint a fénynél gyorsabban egyetlen test sem mozoghat, hiszen az $X(T)$ függvény nem egyazon anyagi pont helyzetét, hanem különböző vízcseppek földetérési koordinátáit adja meg.