Jelölje l a hasáb hosszúságát, ϱ a sűrűségét. Legyen a víz sűrűsége és a hasáb alaplapjának éle egységnyi. Mivel a hasáb hosszú, azaz mivel $l \gg 1$, felesleges foglalkozni az alaplappal párhuzamos tengely körüli elfordulásokkal, elegendő a stabilitást az oldallapokkal párhuzamos tengely körüli kis, α -szögű elforgatásokon vizsgálni.

1987-04-183-1.eps

Stabil egyensúlyi helyzetben a rendszer helyzeti energiája minimális. A teljes energia két részre bontható, a hasáb és a kiszorított víz helyzeti energiájára. Tekintsük a helyzeti energia nullszintjének a vízszintet.

Elfordítás előtt s magasságig merül víz alá a hasáb. A kiszorított víz és a hasáb tömege megegyezik, így fenti megkötéseink alapján:

$$s = \varrho.$$

Így a súlypont távolsága a vízszinttől, $\overline{OF} = 1/2 - \varrho$. A hasáb helyzeti energiája:

$$E_0^{\text{hasáb}} = l \cdot g \cdot \varrho \cdot (1/2 - \varrho).$$

A kiszorított víz energiája (a kiszorított víz súlya szorozva a bemerülő rész súlypontjának a felszíntől mért távolságával).

$$E_0^{\text{víz}} = l \cdot g \cdot \varrho/2.$$

Azaz a teljes helyzeti energia kezdetben:

$$E_0^{\text{teljes}} = 1/2 \cdot l \cdot g(\varrho - \varrho^2).$$

Az elforgatás után (lásd az ábrát) jelölje a trapéz két oldalát x és y. Mivel a kiszorított víz és a hasáb súlya továbbra is megegyezik, így a trapéz középvonala s hosszúságú, azaz

$$\frac{x+y}{2} = \varrho.$$

Teljesül a következő egyenlet is:

$$x - y = \text{tg } \alpha.$$

Innen

$$x = \varrho + 1/2 \text{tg } \alpha,$$
$$y = \varrho - 1/2 \text{tg } \alpha.$$

Az ábra alapján a súlypont távolsága a víz felszínétől $(1/2 - \varrho) \cos \alpha$, így a hasáb megváltozott helyzeti energiája

$$E_1^{\text{hasáb}} = l \cdot g \cdot \varrho(1/2 - \varrho) \cos\ \alpha.$$

A teljes energia másik részét bontsuk további két részre, az ABG_1I téglalapból és az IG_1H_1 háromszögből származó tagra. Az előbbi járuléka:

$$E_{(1)}^{\text{víz}} = l \cdot g \cdot y(\varrho - y/2) \cos \alpha = l \cdot g \cdot [\varrho^2/2 - \text{tg}^2\alpha/8] \cdot \cos \alpha.$$

A háromszög területe $(x-y)/2$, magassága $(x-y) \cdot \cos \alpha$. Mivel a háromszög súlypontja harmadolja a súlyvonalakat, és az I csúcshoz tartozó súlyvonal vízfelületre merőleges vetülete éppen a fenti magasság, így e tag járuléka:

$$E_2^{\text{víz}} = l \cdot g \cdot \frac{x-y}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot (x-y) \cos \alpha = \frac{\text{tg}^2\alpha}{6} \cos \alpha.$$

A tg $\alpha \cong \alpha$ és a $\cos\alpha \cong 1 - \alpha^2/2$ közelítéseket alkalmazva mivel α kicsi, s elhanyagolva a négyzetnél magasabb rendű tagokat α-ban, a teljes energia:

$$E_1^{\text{teljes}} = 1/2\ (\varrho - \varrho^2) + 1/4\ (\varrho^2 - \varrho + 1/6)\alpha^2,$$

azaz az energia megváltozása:

$$\Delta E = 1/4\ (\varrho^2 - \varrho + 1/6)\alpha^2.$$

Az egyensúlyi feltétel, hogy tetszőlegesen kis α -ra növekedjék az energia; azaz

$$\varrho^2 - \varrho + 1/6 > 0$$

teljesüljön. Innen (a $0 < \varrho < \varrho_{\text{víz}}$ feltételt is kihasználva)

$$0 < \varrho < \frac{3-\sqrt{3}}{6} \cdot \varrho_{\text{víz}}, \qquad \text{vagy} \qquad \frac{3+\sqrt{3}}{6}\varrho_{\text{víz}} < \varrho_{\text{víz}}$$

adódik.

Megjegyzés. Megvizsgálhatjuk a hasáb egy másik helyzetének stabilitását is, amikor az 1 hosszúságú élek függőlegesen állnak. Hasonló módon levezetve, a stabilitásra a következő feltételt kapjuk:

$$\frac{3l+9l^2-6}{6l}\varrho_{\text{víz}} < \varrho_{\text{víz}}.$$