

Jelölje az alsó test tömegét M , sebességét V , a felső tömegét m , sebességét w . Legyen a kialakuló közös sebesség u . A nyugvó rendszerben megtett utakat jelölje rendre s_1 és s_2 , hasonlóképp az u sebességű rendszerben s'_1 és s'_2 .

I. Írjuk fel a munkatételt mindkét testre külön-külön, először a nyugvó, majd a v sebességgel mozgó koordináta-rendszerben! (Az F súrlódási erő mindkét rendszerben ugyanakkora, mivel inerciarendszerek.)

$$(1) \quad F \cdot s_1 = \frac{Mu^2}{2} - \frac{MV^2}{2},$$

$$(2) \quad -F \cdot s_2 = \frac{mu^2}{2} - \frac{mw^2}{2},$$

$$(3) \quad -F \cdot s'_1 = \frac{M(u-V)^2}{2},$$

$$(4) \quad -F \cdot s'_2 = -\frac{m(u-w)^2}{2},$$

1987-04-182-1.eps

Az ábra alapján a következő összefüggést írhatjuk fel az utak között:

$$(5) \quad s_1 + s'_1 + s'_2 = s_2,$$

ugyanis a megtett út a görbe alatti terület mérőszámával egyezik meg, és az u sebességű koordináta-rendszer esetén a nullaszint a $v = u$ egyenes.

Az egyenletrendszert megoldva két értéket kapunk, az $u = 0$ -t, illetve az

$$u = \frac{MV + mw}{m + M}$$

értéket. Ez utóbbi a helyes megoldás, ez áll összhangban az impulzusmegmaradás törvényével.

II. Az előző jelöléseket és az (1), (2) egyenleteket megtartva, határozzuk meg a nyugvó rendszerben megtett utakat:

$$(6) \quad s_1 = V_{\text{átlag}} \cdot t = \frac{V + u}{2} \cdot t,$$

$$(7) \quad s_2 = w_{\text{átlag}} \cdot t = \frac{w + u}{2} \cdot t.$$

Kaptunk négy egyenletet négy ismeretlennel (s_1 , s_2 , u , t), a megoldás a közös sebességre:

$$u = \frac{MV + mw}{M + m}.$$

III. Írjuk fel a munkatételt a két testből álló rendszerre a nyugvó koordináta-rendszerben :

$$(8) \quad -F_s \cdot \Delta s = \frac{1}{2}(m + M)u^2 - \frac{1}{2}MV^2 - \frac{1}{2}mw^2,$$

ahol

$$(9) \quad \Delta s = s_2 - s_1$$

a felső testnek az alsón megtett útja.

Mivel a felső testet az $F = \mu mg$ erő lassítja, a gyorsulása

$$a = -\mu \cdot g,$$

a sebességváltozás ideje pedig

$$t = \frac{u - w}{-\mu g}.$$

Nilvánvalóan ugyanennyi idő alatt gyorsul fel a másik test is, így a fenti értéket (6)-ba és (7)-be helyettesítve, azokból (9) alapján Δs kifejezhető. Így (8)-ban már csak egyetlen ismeretlenünk van, az u sebesség, amelyre

$$u = \frac{MV + mw}{M + m}$$

adódik.

Megjegyzések. 1. Amennyiben a két sebesség nem egyirányú, a két sebességet előjeles mennyiségként kezelve, a fenti gondolatmenetekkel helyes eredményre jutunk.

2. Sok megoldónk feltételezte, tévesen, hogy a két test egyenlő utat tesz meg, s így a helytelen

$$u = \frac{MV^2 + mw^2}{M + m}$$

eredményre jutott.