Vezessük be a következő jelöléseket: Legyen R_0 a golyó középpontja által leírt kör sugara

$$R_0 = R - (r + \varrho)\sin\ \alpha \tag{1}$$

1987-03-139-2.eps

Jelölje $\omega(t)$ a golyó pillanatnyi szögsebességét, ω_k a középpontjának keringési sebességét. (Lásd az ábrát.) $\omega(t)$ nagysága állandó, csak iránya változik a keringés során.

A golyóra a következő erők hatnak:

— a $G = mg$ nehézségi erő,

— a K kényszererő, amely a golyó és a körgyűrű között lép fel, és merőleges az érintkező felületekre,

— az F_t tapadási súrlódási erő, mivel a golyó nem csúszik meg oldalirányba (lásd az ábrát).

Az erők eredője biztosítja a golyó körpályán tartásához szükséges centripetális erőt, azaz vízszintes és függőleges komponensekre felbontva:

$$K\sin\ \alpha - F_t\cos\ \alpha = mR_0\cdot\omega_k^2, \tag{2}$$

$$mg - K\cos\ \alpha - F_t\sin\ \alpha = 0. \tag{3}$$

Mivel a K és G erők hatásvonala átmegy a golyó súlypontján, nincs forgatónyomatékuk. Így a perdület idő szerinti deriváltja:

$$\frac{dN}{dt} = \theta\frac{d\omega}{dt} = F_t\cdot r, \tag{4}$$

ahol $\theta = \frac{2}{5}mr^2$ a gömb tehetetlenségi nyomatéka.

Vizsgáljuk $\omega(t)$ és ω_k kapcsolatát!

A golyó középpontjának sebessége egyrészt $\omega_k R_0$ a keringésből, másrészt ωr a gördülésből:

$$\omega_k R_0 = \omega\cdot r. \tag{5}$$

ω függőleges komponense állandó, míg az $\omega\cos\ \alpha$ nagyságú vízszintes komponense ω_k szögsebességgel forog. Az idő szerinti deriváltja tehát (hasonlóan egy forgó helyvektor időderiváltjához:

$$\left|\frac{d\omega}{dt}\right| = \omega_k\omega\cos\ \alpha. \tag{6}$$

Megvan a szükséges számú független egyenletünk. A (4), (5) és (6) egyenletből:

$$F_t = \frac{2}{5}mR_0\omega_k^2\cos\ \alpha, \tag{7}$$

a (2) és (3) egyenletből pedig

$$mg\sin\ \alpha - F_t = mR_0\omega_k^2\cos\ \alpha. \tag{8}$$

Végül az utolsó két egyenletből a golyó keringési sebessége:

$$\omega_k = \sqrt{\frac{5}{7}\frac{g}{R_0}\mathrm{tg}\alpha}.$$

Megjegyzés. Két megoldó kivételével senki sem vette figyelembe, hogy a szögsebesség iránya folyamatosan változik, s hogy ezt a tapadási súrlódási erő nyomatéka biztosítja. Így mindenki megelégedett a körpályán mozgás feltételeinek felírásával. A két megoldás viszont egy iskolából érkezett, s feltűnően hasonlított egymásra. Ez a magyarázata a pontszámoknak.