Először számoljuk ki a pálca szögsebességét az ütközés előtti pillanatban. Nullszintnek a pálca nyugalmi helyzetbeli súlypontjának magasságát választva, az energiatétel alapján:

$$mg \cdot \frac{l}{2} = \frac{1}{2} \cdot \theta\omega_0^2. \tag{1}$$

Az adott forgásra nézve a pálca tehetetlenségi nyomatéka $\frac{1}{3}ml^2$, így $\omega_0 = \sqrt{\frac{3g}{l}}$.

A továbbiakban a feladat megfogalmazása ellentmondásos. Tökéletesen rugalmas ütközés esetén a pálca és az inga a mozgás későbbi részében nem marad együtt. Ha viszont azt fogadjuk el, hogy nem válnak szét, akkor az ütközés rugalmatlan kell legyen. Az nem fordulhat elő, hogy az ütközés tökéletesen rugalmas és mégis együtt marad a két test.

Vizsgáljuk meg mindkét esetet!

1987-03-138-1.eps

1. Rugalmatlan ütközés esetén a pálca és a fonálinga az ütközés után is együtt mozog, mert a pálca rezgésszáma lenne a nagyobb, de nem előzheti meg a fonálingát.

A perdület az ütközés során nem változik:

$$\theta\omega_0 = (\theta + ml^2)\omega_1. \tag{2}$$

Ebből $\omega_1 = \frac{\theta\omega_0}{\theta + ml^2} = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{\frac{3g}{l}}$ az ütközés utáni közös szögsebesség. Az emelkedés során a forgási energia átalakul helyzeti energiává.

A megállás pillanatában (a pálca súlypontja $\frac{h}{2}$-t emelkedik, ha a végpontja h-t):

$$\frac{1}{2}(\theta + ml^2) \cdot \omega_1^2 = mg\left(h + \frac{h}{2}\right). \tag{3}$$

Ebből θ és C_1 behelyettesítésével $h = \frac{l}{12}$. A pálca végpontja és az inga együttesen tehát $\frac{l}{12}$ magasra lendül a nyugalmi helyzethez viszonyítva.

2. Rugalmas ütközés esetén:

Az ütközésre most a perdület megmaradásán kívül az energiamegmaradás is érvényes. Jelölje ω_2 az inga, ω_3 a rúd szögsebességét az ütközés után.

$$\theta \cdot \omega_0 = ml_2 \cdot \omega_2 + \theta\omega_3. \tag{5}$$

$$\frac{1}{2}\theta \cdot \omega_0^2 = \frac{1}{2}ml^2\omega_2^2 + \frac{1}{2}\theta\omega_3^2. \tag{6}$$

A két egyenletből $\omega_2 = \frac{1}{2}\omega_0$ és $\omega_3 = -\frac{1}{2}\omega_0$, tehát az inga feleakkora szögsebességgel továbblendül, a pálca pedig „visszapattan”. Az emelkedéseket az energiatétel alapján számoljuk:

Az ingára: $\frac{1}{2}ml^2 \cdot \omega_2^2 = mgh_1 \to h_1 = \frac{3}{8}\ l$;

a rúdra : $mgh_2/2 = \frac{1}{2}\theta \cdot \omega_2^2 \to h_2 = \frac{1}{4}\ l$.

Az inga tehát $\frac{3}{8}\ l$, a rúd végpontja pedig $\frac{1}{4}\ l$ magasra lendül, ellenkező irányokba.