A vízfelszínre helyezett alumíniumhuzalra a saját súlyán kívül hat a vízbe merült térfogattal arányos felhajtóerő, a felületi feszültségből és a h besüllyedéssel arányos hidrosztatikai nyomásból származó erő; ezen erők egyensúlya alapján határozhatjuk meg a maximális huzalátmérőt. Mindegyik erő arányos a drót hosszával, így elegendő az egységnyi hosszra ható erőket kiszámítani.

Az egységnyi hosszúságú, r sugarú Al huzal súlya $\varrho_{\mathrm{Al}} \cdot g \cdot r^2\pi$. A vízbe merült térfogatrész egy 2ϑ központi szöggel jellemezhető körszelet, így a felfelé mutató felhajtóerő: $\varrho \cdot gr^2(\vartheta - \sin\vartheta \cdot \cos\vartheta)$, ahol ϱ a víz sűrűsége.

A h besüllyedésből adódó hidrosztatikai nyomás $\varrho \cdot gh$, mely $2r \cdot \sin\vartheta$-val arányos keresztmetszetre $2\varrho \cdot gh \cdot r\sin\vartheta$ nagyságú, a huzal súlyával ellentétes irányú erőt fejt ki.

A vízzel kétoldalt érintkező Al drótra a felületi feszültségből származó erő 2α egységnyi hosszra vonatkoztatva. Az erők vektora az érintkezési vonalon a vízfelszín síkjában fekszik, így a vízszintes komponensek kétoldalt kiegyenlítik egymást, míg a függőleges komponensek eredője egy függőleges, felfelé mutató $2\alpha \cdot \sin\vartheta$ járulékot ad az előbbi erőkhöz.

A fentiek alapján felírható az egyensúly feltétele:

$$\varrho_{\mathrm{Al}} g \cdot \pi r^2 = \varrho \cdot gr^2(\vartheta - \sin\vartheta \cdot \cos\vartheta) + 2\varrho \cdot ghr\sin\vartheta + 2\alpha \cdot \sin\vartheta. \tag{1}$$

A feladatban megadott h kifejezést (1)-be írva a keresett egyensúlyi sugárra az alábbi másodfokú egyenletet kapjuk:

$$\begin{gathered}\Big(\varrho \cdot g(\vartheta - \sin\vartheta \cdot \cos\vartheta) - \pi \cdot \varrho_{\mathrm{Al}} g\Big) r^2 + \\ + \left(4\sqrt{\alpha \cdot \varrho \cdot g}\,\sin\frac{\vartheta}{2}\sin\vartheta\right) r + 2\alpha \cdot \sin\vartheta = 0.\end{gathered}$$

Osszuk el ezt az egyenletet $\varrho \cdot g$-vel és alkalmazzuk az $a = \sqrt{\dfrac{\alpha}{\varrho \cdot g}}$ jelölést, ekkor

$$\left(\vartheta - \sin\vartheta \cdot \cos\vartheta - \pi\frac{\varrho_{\mathrm{Al}}}{\varrho}\right) r^2 + (4\sin\vartheta/2 \cdot \sin\vartheta) r \cdot a + 2a^2 \sin\vartheta = 0$$

adódik. Ebben az egyenletben adatként a dimenziótlan $\varrho_{\mathrm{Al}}/\varrho = 2,7$ mellett a hosszúság dimenziójú a szerepel, amelynek számértéke a függvénytáblázatban megtalálható adatokkal

$$a = \sqrt{\frac{0,0729\ \mathrm{N/m^2}}{9,81\ \mathrm{m/s^2} \cdot 1000\ \mathrm{kg/m^2}}} = 2,73\ \mathrm{mm}.$$

Célszerű az r sugarat is „a-egységekben” mérni, azaz $r = x \cdot a$ a alakban keresni. Ezzel a dimenziótlan x mennyiségre a

$$(\vartheta - \sin\vartheta \cdot \cos\vartheta - 2,7\pi)x^2 + \left(4\sin\frac{\vartheta}{2}\sin\vartheta\right)x + 2 \cdot \sin\vartheta = 0 \tag{2}$$

másodfokú egyenlet adódik.

Az egyenlet együtthatói a ϑ paramétertől függenek, amely 0-tól π-ig változhat. A megoldóképlettel kifejezhetjük r-t a ϑ függvényében, és megkeresve a függvény maximumát, nyerjük a keresett maximális huzalátmérőt. Az itt vázolt módszer a differenciálszámítás elemeit felhasználva egy rendkívül bonyolult, csak numerikusan megoldható egyenletre vezet ϑ-ban. Ennél egyszerűbb, ha közvetlenül a (2) egyenletet használjuk a numerikus számoláshoz. Elegendően sűrűn (pl. 10°-onként) kiszámítjuk az adott ϑ szöghöz tartozó másodfokú egyenlet együtthatóit, majd ezekből az x gyököt. (A két gyök közül a pozitívat tartjuk meg.) Az r sugarat a ϑ függvényében ábrázolva kiválaszthatjuk a maximális r értéket. Szerencsére most már könnyen hozzájuthatunk kisebb személyi számítógépekhez, és így gyorsan és elegendő pontossággal végrehajthatjuk a numerikus számításokat. Egy lehetséges BASIC nyelvű programrészlet:

```
100 INPUT „SŰRŰSÉG”; RO
110 PRINT „KEZDŐ ÉS VÉGSZÖG”
120 INPUT „TK, TV:”; TK, TV
130 PRINT „A SZÖGTARTOMÁNY FELOSZTÁSÁNAK SZÁMA:”
140 INPUT „N:”; N
150 FOR I = 0 TO N
160 LET TT=TK+(TV–TK)/N* I
170 LET TE=TT* PI/180
180 LET A=TE–SIN(TE)* COS(TE)–3, 14159* RO
190 LET B=4* SIN(TE/2)* SIN(TE):LET C=2* SIN(TE)
200 LET X=(–B SQR(B* B–4* A* C)/2/A
210 PRINT „SZÖG, SUGÁR=”; TT, X* 2.73
220 NEXT I
```

1987-02-094-1.eps

1. ábra

Az eredményt grafikonon ábrázoltuk (1. ábra). A bemenő adatok különböző értékei mellett egyre pontosabban adhatjuk meg a maximális r értéket. Két tizedesjegyre $\vartheta_0 = 115^\circ$-nál $r_{\max} = 2,32$ mm. A vízre helyezhető Al drót maximális átmérője $4,64$ mm és ekkor $h = 4,59$ mm a besüllyedés. A drót legalsó alkotója $h + r\Big(1 + \cos(180 - \vartheta_0)\Big) = 7,89$ mm mélyen van a víz felszíne alatt (2. ábra).

1987-02-094-2.eps

2. ábra

A megoldás fizikai jelentése és az egyensúlyi viszonyok stabilitása jól szemléltethető egy olyan ábrával, amelyen egy adott sugarú henger és a víz teljes energiáját tüntetjük fel a henger helyzetének (bemerülési mélységének) függvényében. Ezt a grafikont úgy kaphatnánk meg, ha a hengerre ható teljes erőt – vagyis az (1) egyenlet jobb és bal oldalának különbségét – megszoroznánk a henger kicsiny elmozdulásaival, s az így számított munkavégzéseket valamely önkényesen választott nullponttól kiindulva összegeznénk, integrálnánk. Az eredmény a 3. ábrán látható görbesereg lenne.

1987-02-094-3.eps

3. ábra

Amennyiben $r < r_{\max}$, úgy két olyan ϑ érték is található, amelynél erőegyensúly valósul meg (lásd 1. ábra), vagyis ahol az energia-függvénynek szélső értéke van. A kisebb bemerülés stabil –, a nagyobb instabil egyensúlynak felel meg. A henger sugarát növelve $r = r_{\max}$-nál a két egyensúlyi helyzet „összecsúszik", az energiafüggvénynek pedig inflexiós pontja alakul ki. Ekkor és ennél nagyobb sugarú hengereknél semmilyen helyzetben nem lehet egyensúly, sőt már $r \leqq r_{\max}$ esetén is – az energiafüggvény nagyon „sekély" lokális minimuma miatt – nagyon nehezen állítható be az egyensúlyi helyzet.

Megjegyzés. Kísérletileg is meghatározhatjuk az $r_{\max}$ értéket amely több körülmény befolyásoló hatása miatt eltérhet a fenti elméleti $r_{\max}$ értéktől. A felületi feszültség nem tiszta víz esetén megváltozik, a drót véges hosszúságú, és nagyon óvatosan kell a vízre tenni a zavarok elkerülése miatt. Tóth Tamás elvégezte a kísérletet, és szerinte $r > 1,5$ mm esetén elsüllyed a drót.

A megoldás során hallgatólagosan feltételeztük, hogy a víz egyáltalán nem nedvesíti az alumíniumot, vagyis hogy a víz és a fém ún. illeszkedési szöge $\approx 180^\circ$. Ez szigorúan véve nem igaz, de a huzal felületének szennyeződése, „zsírossága" miatt jó közelítésnek tekinthető.