Legyen a kocka oldala a, a félgömb sugara R (1. az ábrát)!

1987-03-133-2.eps

Tételezzük fel, hogy a súrlódás elég nagy ahhoz, hogy a kocka ne csússzon meg! (Ellenkező esetben nincsen stabil egyensúly.) A stabil egyensúly feltétele az, hogy a kockát kissé kitérítve, visszatérjen eredeti helyzetébe. Másképpen fogalmazva: kitérítéskor a helyzeti energiája nőjön. Térítsük ki a kockát kicsiny α szöggel, és határozzuk meg helyzeti energiájának változását! Mivel a kocka tapad a félgömbhöz, ez gördülő mozgást enged csak meg. Más szóval az AB távolság egyenlő $R\cdot\alpha$-val. B az a pont, amely eredetileg érintkezett a félgömbbel, α-t radiánban mérjük. A tömegközéppont eredeti magassága $R+\alpha/2$, a jelenlegi pedig $OA'+BB'+BC'$. Az ábráról látható, hogy

$OA'=R\cos\alpha$

$BC'=a\cos\alpha/2$.

Mivel tudjuk, hogy $AB=R\cdot\alpha$, eszerint $BB'=R\cdot\alpha\cdot\sin\alpha$. Tehát a tömegközéppont magasságváltozása (h_1 az eredeti, h_2 az új magasság):

$$h_2-h_1=R\cos\alpha+a\cdot\cos\alpha/2+R\cdot\alpha\sin\alpha-(R+a/2)=$$

$$=(R+a/2)(\cos\alpha-1)+R\alpha\sin\alpha.$$

Mivel α nagyon kicsiny szög, használhatjuk a következő közelítéseket: $\sin\alpha=\alpha$, $\cos\alpha=1-\alpha^2/2$.

Ezt beírva kapjuk, hogy kis kitérítés esetén a kocka tömegközéppontjának magasságváltozása $\frac{\alpha^2}{2}[R-a/2]$. Látható, hogy ahhoz, hogy ez zérusnál nagyobb legyen, az $a<2R$ feltételnek kell teljesülnie. Ez egyben az elégséges feltétel is, ugyanis az előzőek alapján ezt a feltételt teljesítve mindig találhatunk olyan, kellően kicsiny α-t, amelyre a tömegközéppont emelkedni fog.

Tehát $2R>a$ a stabil egyensúly szükséges és elégséges feltétele.