

Az egyszerűség kedvéért vegyük a súrlódást 0-nak a henger felső, száraz pereménél. Írjuk fel az erő és nyomatéki egyensúlyokat az 1. ábra szerinti helyzetben, tehát $\alpha > 45^\circ$ esetén.

1987-01-040-1.eps

1. ábra

$$\begin{aligned}\Sigma F_x = 0, & \quad F_1 \cdot \sin \alpha = F_2 \cdot \cos \beta, \\ \Sigma F_y = 0, & \quad G = F_f + F_1 \cdot \cos \alpha + F_2 \cdot \sin \beta, \\ \Sigma M_A = 0, & \quad G \cdot \frac{h}{2} \cdot \cos \alpha = F_1 \cdot \frac{2r}{\sin \alpha} + F_f \frac{y/2}{\operatorname{tg} \alpha}.\end{aligned}$$

Mivel a vékony pálca keresztmetszete nem adott, vezessük be erőegységként a pálca egységnyi hosszának a súlyát!

$$f_1 = F_1/A \cdot \varrho \cdot g,$$

$$f_2 = F_2/A \cdot \varrho \cdot g.$$

Mivel

$$G = h \cdot A \cdot \varrho \cdot g,$$

$$F_f = \frac{y}{\sin \alpha} A \cdot \varrho \cdot r \cdot g,$$

ezért

$$(1) \quad f_1 \cdot \sin \alpha = f_2 \cdot \cos \beta,$$

$$(2) \quad h = \frac{y}{\sin \alpha} \cdot \frac{\varrho_v}{\varrho} + f_1 \cos \alpha + f_2 \sin \beta,$$

$$(3) \quad h \cdot \frac{h}{2} \cos \alpha = f_1 \cdot \frac{2r}{\sin \alpha} + \frac{y}{\sin \alpha} \cdot \frac{\varrho_v}{\varrho} \cdot \frac{y/2}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

Mivel az F_2 vízszintes komponense tapadási súrlódási erő:

$$-\mu \leq \frac{F_2 \cdot \cos \beta}{F_2 \cdot \sin \beta} \leq \mu, \quad \text{azaz}$$

$$-\mu \leq \operatorname{ctg} \beta \leq \mu.$$

Ezen kívül feltétel még, hogy

$$f_1 \geq 0; \quad f_2 \geq 0.$$

Az erő és nyomatéki egyensúlyok a 2. ábra szerinti helyzetben, tehát $\alpha < 45^\circ$ esetén:

1987-01-040-2.eps

2. ábra

$$\begin{aligned}\Sigma F_x = 0, & \quad F_1 \cdot \sin \alpha = F_2 \cos \beta; \\ \Sigma F_y = 0, & \quad G = F_f + F_1 \cdot \cos \alpha + F_2 \cdot \sin \beta; \\ \Sigma M_A = 0, & \quad G \cdot \frac{h}{2} \cdot \cos \alpha = F_1 \cdot \frac{2r}{\cos \alpha} + F_f \cdot \frac{[y - 2r(1 - \operatorname{tg} \alpha)]/2}{\operatorname{tg} \alpha}.\end{aligned}$$

A felhajtóerő:

$$F_f = 0, \quad \text{ha } y - 2r(1 - \operatorname{tg} \alpha) < 0;$$

$$F_f = \frac{y - 2r(1 - \operatorname{tg} \alpha)}{\sin \alpha} A \cdot \varrho_v g, \quad \text{ha}$$

$$y - 2r(1 - \operatorname{tg} \alpha) = 0.$$

Először keressük az egyensúlyi helyzeteket ebben a két esetben. Vigyázat: a 45° -kal való egyenlőséget, azaz a sarokba szorult helyzetet óvatosan kerültük.

Ezért ha $y - 2r(1 - \operatorname{tg} \alpha) < 0$,

$$(1') \quad f_1 \sin \alpha = f_2 \cos \beta,$$

$$(2') \quad \varrho_v h = \frac{y - 2r(1 - \operatorname{tg} \alpha)}{\sin \alpha} \frac{\varrho_v}{\varrho} + f_1 \cos \alpha + f_2 \sin \beta,$$

$$(3') \quad h \cdot \frac{h}{2} \cdot \cos \alpha = f_1 \frac{2r}{\cos \alpha} + \frac{[y - 2r(1 - \operatorname{tg} \alpha)]^2}{2 \sin \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha} \frac{\varrho_v}{\varrho}.$$

Az F_2 függőleges komponense tapadási súrlódási erő, ezért

$$-\mu \leq \frac{F_2 \cdot \sin \beta}{F_2 \cdot \cos \beta} \leq \mu, \quad \text{azaz}$$

$$-\mu \leq \operatorname{tg} \beta \leq \mu.$$

Ugyancsak feltétel az $f_1 \geq 0$, $f_2 \geq 0$ egyenlőtlenségek teljesülése.

Ezért ha $y - 2r(1 - \operatorname{tg} \alpha) < 0$,

$$(1'') \quad f_1 \sin \alpha = f_2 \cos \beta,$$

$$(2'') \quad h = f_1 \cos \alpha + f_2 \sin \beta,$$

$$(3'') \quad \frac{h^2}{2} \cos \alpha = f_1 \cdot \frac{2r}{\cos \alpha}.$$

(1, 2, 3) megoldása

$$f_1 = \frac{h^2}{4r} \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \left[\sin^2 \alpha - \left(\frac{y}{h} \right)^2 \frac{\varrho_v}{\varrho} \right].$$

A $45^\circ < \alpha < 90^\circ$, $0 < y < 2r$ intervallumban $f_1 \geq 0$ mindig teljesül:

$$f_2 = f_1 \cdot \sin \alpha \cdot \frac{1}{\cos \beta},$$

$$h = \frac{y}{\sin \alpha} \cdot \frac{\varrho_v}{\varrho} + f_1 \cdot \cos \alpha + f_1 \cdot \sin \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta,$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{h - \frac{y}{\sin \alpha} \cdot \frac{\varrho_v}{\varrho} - f_1 \cdot \cos \alpha}{f_1 \cdot \sin \alpha}.$$

$-\frac{1}{2} \leq \operatorname{ctg} \beta \leq \frac{1}{2}$ és F_2 miatt nem engedjük meg a 0° -nál kisebb és 180° -nál nagyobb szögeket. Így β -ra a megengedett intervallum $63,4^\circ - 116,6^\circ$.

$f_1 \geq 0$ miatt ebből is ki kell zárni a 90° -nál nagyobb szögeket.

$$\operatorname{ctg} \beta = \frac{f_1 \sin \alpha}{h - \frac{y}{\sin \alpha} \cdot \frac{\rho_v}{\rho} - f_1 \cos \alpha},$$

$$\operatorname{ctg} \beta = \frac{1}{2} = \frac{f_1 \sin \alpha}{h - \frac{y}{\sin \alpha} \cdot \frac{\rho_v}{\rho} - f_1 \cos \alpha}.$$

Az ebből meghatározott $y(\alpha)$ -nál nagyobb vízmagasság esetén a rúd megcsúszik és csak a sarokban áll meg:

$$\frac{h}{2} - \frac{y}{2 \sin \alpha} \cdot \frac{\rho_v}{\rho} = f_1 \left(\sin \alpha + \frac{\cos \alpha}{2} \right),$$

$$\frac{h}{2} - \frac{y}{2 \sin \alpha} \cdot \frac{\rho_v}{\rho} = \frac{h^2 \cos \alpha}{4r \sin \alpha} \left(\sin \alpha + \frac{\cos \alpha}{2} \right) \left[\sin^2 \alpha - \left(\frac{y}{h} \right)^2 \frac{\rho_v}{\rho} \right],$$

$$y^2 \cdot \frac{1}{h^2} \cdot \frac{\rho_v}{\rho} \cdot \frac{h^2}{4r} \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \left(\sin \alpha + \frac{\cos \alpha}{2} \right) - y \frac{1}{2 \sin \alpha} \frac{\rho_v}{\rho} + \frac{h}{2} -$$

$$- \frac{h^2 \cos \alpha}{4r \sin \alpha} \left(\sin \alpha + \frac{\cos \alpha}{2} \right) \sin^2 \alpha = 0.$$

Ennek a másodfokú egyenletnek a gyökei adják meg azt a h^2 magasságot, amelynél egy adott α helyzet már nem stabil és a rúd a sarokba csúszik.

$$y = 0\text{-nál} \quad \alpha = 63,67^\circ.$$

Ennél kisebb kezdeti α esetén már a betöltés előtt a sarokba csúszik a rúd.

Most vizsgáljuk az $(1', 2', 3')$; $y > 2r(1 - \operatorname{tg} \alpha)$ által meghatározott egyensúlyi helyzeteket.

$$f_1 = \frac{h^2}{4r} \cos^2 \alpha \cdot \left[1 - \left(\frac{y - 2r(1 - \operatorname{tg} \alpha)}{h \cdot \sin \alpha} \right)^2 \frac{\rho_v}{\rho} \right].$$

A $0 < \alpha < 45^\circ$, $0 < y < 8$, $2r(1 - \operatorname{tg} \alpha) < y$ intervallumban ez a kifejezés pozitív, így $f_1 \geq 0$ mindig teljesül,

$$f_2 = f_1 \cdot \sin \alpha \cdot \frac{1}{\cos \beta} \quad \text{-t} \quad (2')\text{-be helyettesítve}$$

$$h = \frac{y - 2r(1 - \operatorname{tg} \alpha)}{\sin \alpha} \cdot \frac{\rho_v}{\rho} + f_1 \cdot \cos \alpha + f_1 \cdot \sin \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta,$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{h - \frac{y - 2r(1 - \operatorname{tg} \alpha)}{\sin \alpha} \cdot \frac{\rho_v}{\rho} - f_1 \cos \alpha}{f_1 \cdot \sin \alpha}.$$

A megkötések β -ra :

$$-\frac{1}{2} \leq \operatorname{tg} \beta \leq \frac{1}{2}, \quad \text{azaz} \quad -26,6^\circ \leq \beta \leq 26,6^\circ$$

és $-90^\circ \leq \beta \leq 90^\circ$, mert a fal támaszerőt fejt ki. Mindez csak $y \leq 2r(1 - \operatorname{tg} \alpha)$ esetén igaz.

A megcsúzás határesetében $\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{2}$ vagy $\operatorname{tg} \beta = -\frac{1}{2}$.

$$\pm \frac{1}{2} = \frac{h - \frac{y - 2r(1 - \operatorname{tg} \alpha)}{\sin \alpha} \cdot \frac{\varrho_v}{\varrho} - f_1 \cos \alpha}{f_1 \sin \alpha},$$

$$f_1 \left(\cos \alpha \pm \frac{\sin \alpha}{2} \right) = h - \frac{y - 2r(1 - \operatorname{tg} \alpha)}{\sin \alpha} \cdot \frac{\varrho_v}{\varrho},$$

$$\begin{aligned} \frac{h^2}{4r} \cos^2 \alpha \left[1 - \left(\frac{y - 2r(1 - \operatorname{tg} \alpha)}{h \cdot \sin \alpha} \right)^2 \cdot \frac{\varrho_v}{\varrho} \right] \left(\cos \alpha \pm \frac{\sin \alpha}{2} \right) = \\ = h - \frac{y - 2r(1 - \operatorname{tg} \alpha)}{\sin \alpha} \cdot \frac{\varrho_v}{\varrho}, \end{aligned}$$

$$y^2 \cdot \frac{h^2}{4r} \cos^2 \alpha \cdot \frac{\varrho_v}{\varrho \sin^2 \alpha \cdot h^2} \left(\cos \alpha \pm \frac{\sin \alpha}{2} \right) -$$

$$-y \left[\frac{1}{\sin \alpha} \cdot \frac{\varrho_v}{\varrho} + \cos^2 \alpha \cdot \frac{\varrho_v}{\varrho} \cdot \frac{(1 - \operatorname{tg} \alpha)}{\sin^2 \alpha} \cdot \left(\cos \alpha \pm \frac{\sin \alpha}{2} \right) \right] + h + \frac{2r(1 - \operatorname{tg} \alpha)}{\sin \alpha} \cdot \frac{\varrho_v}{\varrho} -$$

$$-\frac{h^2}{4r} \cdot \cos^2 \alpha \left[1 - \frac{\varrho_v}{\varrho} \cdot \frac{4r^2(1 - \operatorname{tg} \alpha)^2}{h^2 \cdot \sin^2 \alpha} \right] \cdot \left(\cos \alpha \pm \frac{\sin \alpha}{2} \right) = 0.$$

Ennek a másodfokú egyenletnek a gyökei adják meg azokat a szögtartományokat, ahol lehetséges az egyensúly, feltéve, hogy vannak ilyen gyökök és a vízszint magasabban van a pálca végénél.

Ha a vízszint alacsonyabban van, mint a pálca vége, akkor (1'', 2'', 3'')-ből

$$h = f_1 \cdot \cos \alpha + f_1 \sin \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta,$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{h - f_1 \cdot \cos \alpha}{f_1 \cdot \sin \alpha} = \frac{h}{\frac{h^2}{4r} \cdot \cos^2 \alpha \cdot \sin \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha},$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{4r}{h \cos^2 \alpha \cdot \sin \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha},$$

$$\operatorname{tg} \beta = \pm 1 \text{ -ből } \operatorname{ctg} \alpha \left(\frac{8}{9} \frac{1}{\cos^3 \alpha} - 1 \right) = \pm \frac{1}{2}.$$

Ennek numerikus megoldásából

$$\begin{aligned} + \frac{1}{2} : \quad \alpha_1 &= 29,91^\circ, \\ - \frac{1}{2} : \quad \alpha_2 &= 8,89^\circ. \end{aligned}$$

Azaz α_1 -nél nagyobb szög esetén a pálca a falnál lecsúszik, α_2 -nél kisebb szög esetén pedig kiborul.

Vizsgáljuk az $\alpha = 45^\circ$ -os helyzetet!

$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \operatorname{tg} 45^\circ = 1.$$

Ezt a helyzetet nem tekinthetjük az 1. ábra határesetének, nem feltételezhetjük, hogy a rúd csak az alsó lappal érintkezik.

Ha a 2. ábra határesetének tekintjük, azaz feltételezzük, hogy a rúd csak az oldalsó lappal érintkezik, a következőkre jutunk a $\operatorname{tg} \alpha = \pm \frac{1}{2}$ -re adódó másodfokú egyenletből:

$$y^2 \cdot \frac{1}{4r} \cdot \frac{\rho_v}{\rho} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{1}{2\sqrt{2}} \right) + y \left[\sqrt{2} \frac{\rho_v}{\rho} \right] + h - \frac{h^2}{4r} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{1}{2\sqrt{2}} \right) = 0.$$

(Sok tag esik ki az $1 - \operatorname{tg} \alpha = 0$ miatt.)

$$y^2 \cdot \frac{1}{16} \cdot \frac{8}{5} \left(1 \pm \frac{1}{2} \right) - y \cdot 2 \cdot \frac{8}{5} + \sqrt{2} \cdot 18 - \frac{18 \cdot 18}{16} \cdot \frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{1}{2} \right) = 0,$$

$$y^2 \cdot \frac{1}{10} \cdot \left(1 \pm \frac{1}{2} \right) - y \cdot \frac{16}{5} + \left[18 \cdot \sqrt{2} - \frac{81}{8} \cdot \left(1 \pm \frac{1}{2} \right) \right] = 0.$$

$$y_{1,2} = \frac{\frac{16}{5} \pm \sqrt{\left(\frac{16}{5}\right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{3}{2} + 18 \cdot 2 - \frac{81}{8} \cdot \frac{3}{2}}}{2 \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{3}{2}} \left\langle \begin{array}{l} 3,934, \\ 17,399. \end{array} \right.$$

$$y_{3,4} = \frac{\frac{16}{5} \pm \sqrt{\left(\frac{16}{5}\right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{2} + 18\sqrt{2} - \frac{81}{8} \cdot \frac{1}{2}}}{2 \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{2}} \left\langle \begin{array}{l} 7,178, \\ 56,822. \end{array} \right.$$

Ez azt jelenti, hogy $y = 3,934$ cm-nél még nem elég a függőleges fal támasza, visszacsúszik a pálca az alaplapra is, $y = 7,178$ cm-nél pedig a 45° -os helyzetéből a rúd felcsúszik a falon. (Feltéve, hogy addig külső kényszerrel ott tartottuk.)

Tehát a pálca 45° -os helyzetében $3,934$ cm vízmagasságig nem lehet úgy, hogy csak az alaplapra vagy csak a falra támaszkodjon.

Azaz bármely vízmagassághoz és 45° -tól különböző helyzethez meg tudjuk mondani, hogy egyensúlyi helyzet vagy sem, s azt is $\operatorname{ctg} \alpha$ ill. $\operatorname{tg} \alpha$ alapján, hogy a súrlódási erő melyik irányban nem volt elegendő az egyensúly megtartásához, a rúd milyen irányban mozdult el.

Ahhoz azonban, hogy valamit tudjunk mondani a pálca $\alpha = 45^\circ$ -os viselkedéséről, a sarok alakjáról kellene többet tudnunk.

Ez a feladat egy egész problémakör. Egészen másként kell hozzáfogni a megoldásához, ha a saroknak a 3. a) ábra vagy a 3. b) ábra szerinti alakja van. A rúd vastagságának elhanyagolásával is csínján kell bánni.

1987-01-045-1.eps

3.a ábra

1987-01-045-2.eps

3.b ábra

Ezért ez a megoldás nem is lehetett más, csak útmutató.