I. megoldás. A végtelen vezető sík és a q ponttöltés között kialakuló erőtér olyan, mintha a sík másik oldalára, ugyanolyan távolságra egy $-q$ töltésű ún. „tükörtöltést”helyeznénk el. A töltésre így a síktól x távolságra $F(x) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{(2x)^2}$ nagyságú erő hat. Azt kell tehát meghatároznunk, hogy az így változó erőtérben az m tömegű test mekkora idő alatt teszi meg a d távolságot.

Fogalmazzuk át a problémát! Ugyanekkora a q töltésre ható erő, ha tőle x távolságra levő, $q' = q/4$ töltésű rögzített ponttöltéshez közeledik. Tudjuk, hogy az ilyen erőtérben, amelyben a testre az origótól r távolságra $1/r^2$-tel arányos centrális erő hat, a testek kúpszelet pályákon mozognak. Jelen esetben a test ellipszis pályán mozog, mert összes energiája negatív. A különböző ellipszis pályákra érvényesek a Kepler-törvények.

Az adott problémában a q töltésű test pályája tekinthető egy olyan elfajult ellipszis pályának, amelynek kistengelye nulla hosszúságú. Tekintsük ezt az elfajult ellipszis pályát és egy d sugarú körpályát. Erre a két ellipszis pályára is érvényes a 3. Kepler-törvény, amely szerint

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3}, \tag{1}$$

ahol T_1, ill. T_2 a megfelelő keringési idők, r_1 és r_2 az origótól számított középtávolságok. Jelöljük 1-es indexszel az elfajult ellipszispálya adatait, 2-es indexszel a körpálya adatait. Legyen $r_2 = d$, ekkor a körpályán való keringési idő az alábbi egyenletből számolható:

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{4d^2} = md\left(\frac{2\pi}{T_2}\right)^2, \tag{2}$$

$$\text{mivel } \omega = \frac{2\pi}{T_2}.$$

Az elfajult ellipszispálya esetén $r_1 = d/2$, így (1) és (2) felhasználásával

$$T_1 = 2\pi\frac{\sqrt{2\pi\varepsilon_0 md^3}}{q}.$$

Az általunk keresett becsapódási idő $t = T_1/2$. Numerikusan:

$$t = 5{,}98 \text{ s.}$$

II. megoldás. Az előző megoldásban láttuk, hogy a test mozgása olyan, mintha két azonos tömegű és ellentétes töltésű test közeledne egymáshoz. A mozgás leírásához használjuk fel az energiamegmaradás törvényét! A két test relatív potenciális energiája, ha egymástól $2x$ távolságra vannak:

$$V(x) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{2x}.$$

A két test relatív potenciális energiájának megváltozása egyenlő a szerzett mozgási energiával:

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q^2}{2x} - \frac{q^2}{2d}\right) = 2\cdot\frac{1}{2}mv^2,$$

ahol kihasználtuk, hogy a két test mozgása szimmetrikus, így sebességük minden pillanatban megegyezik és kezdetben a távolságuk $2d$. Mivel $v = dx/dt$, a fenti egyenlet egy differenciálegyenletet ad. A változók szétválasztása után az alábbi egyenletet kapjuk:

$$\frac{\sqrt{8\pi\varepsilon_0\cdot m}}{q}\int_d^0 \frac{x\cdot d}{d-x}\,dx = \int_0^t dt = t.$$

A bal oldali határozott integrál táblázatból kikereshető. A kérdéses becsapódási időre pedig az alábbi eredményt kapjuk:

$$t = \pi\frac{\sqrt{2\pi\varepsilon_0 md^3}}{q}.$$

Numerikusan: $t = 5{,}98$ s.