Az ábrán azt a lecsúszás közbeni esetet tüntettük fel, amikor az $l$ hosszúságú, $m$ tömegű rúd $\alpha$ szöget zár be a függőlegessel, és mindkét falhoz (az $A$ és $B$ pontokban) támaszkodik. A páka mozgása a súlypont ($S$) transzlációs mozgásából (önmagával való párhuzamos eltolódásából) és a súlypont körüli forgómozgásból tevődik össze.

1986-11-419-1.eps

A súlypont sebesség-komponenseit ($v_x$ és $v_y$) és a forgómozgás szögsebességét a mechanikai energia megmaradásának elvéből számíthatjuk ki:

$$mg\,(l/2)(1-\cos\alpha) = 1/2m(v_x^2+v_y^2)+(1/2)\theta_s\,\omega^2 \tag{1}$$

ahol $\theta_s = 1/12\ m\ l^2$, a rúd tehetetlenségi nyomatéka a súlypontján áthaladó és a rúdra merőleges tengelyre vonatkoztatva. A bal oldal a függőleges helyzethez viszonyított helyzeti energia csökkenést veszi figyelembe, míg a jobb oldal a mozgási és a forgási energia összegét tartalmazza. A rúd mindkét végpontja a falakon marad, ezért az $A$ és $B$ pontoknak a falakra merőleges sebességkomponensei eltűnnek:

a vízszintes falra

$$v_{yA} = \omega(l/2)\cdot\sin\,\alpha, \tag{2}$$

a függőleges falra

$$v_{xB} = \omega(l/2)\cdot\cos\,\alpha. \tag{3}$$

A rúd alsó végpontjának sebessége a súlypont vízszintes sebességének a kétszerese: $v_A = 2\cdot v_x$. Kifejezve $\omega$-t $\left(\omega = \sqrt{\dfrac{3g}{l}(1-\cos\,\alpha)}\right)$ és $v_x$-et a fenti egyenletekből

$$v_A = \sqrt{3\,gl(1-\cos\,\alpha)}\cdot\cos\,\alpha. \tag{4}$$

Vigyázni kell azonban arra, hogy ez a függvény csak addig írja le helyesen az $A$ végpont sebességének szögfüggését, amíg a fenti feltételek teljesülnek. Most vizsgáljuk meg, hogyan alakul a mozgás, ha a pálca elválik a függőleges faltól. Ehhez számítsuk ki a függőleges fal $F_B$ nyomóerejét a rúd $\alpha$ szöggel jellemzett helyzetében. A súlypont mozgásegyenlete:

$$ma_x = F_B, \tag{5}$$

$$ma_y = mg - F_A, \tag{6}$$

valamint a rúd forgómozgásának egyenlete:

$$\beta\cdot\theta_s = F_A(l/2)\sin\,\alpha - F_B(l/2)\cos\,\alpha, \tag{7}$$

ahol $\beta$ a pálca szöggyorsulása.

Geometriai feltételként felírhatjuk azt, hogy a végpontok gyorsulásainak a falakra merőleges összetevői eltűnnek. (Az ábra az áttekinthetőség miatt az $A$ és a $B$ pontokban csak a középponthoz viszonyított sebességeket, ill. gyorsulásokat tünteti fel.)

A vízszintes falra:

$$a_{yA} = \beta(l/2)\sin\,\alpha + \omega^2(l/2)\cos\,\alpha, \tag{8}$$

a függőleges falra:

$$a_{xB} = \beta(l/2)\cos\,\alpha - \omega^2(l/2)\sin\,\alpha. \tag{9}$$

Az (5)–(9) egyenletekből kifejezhető a szöggyorsulás – $\beta = 3g/2l\cdot\sin\,\alpha$–, valamint a falak által kifejtett nyomóerő:

$$F_A = 3/4\ mg\ (1/3 - 2\cos\alpha + 3\ \cos^2\,\alpha), \tag{10}$$

$$F_B = 3/4\ mg\ \ \sin\,\alpha(3\ \cos\,\alpha - 2). \tag{11}$$

$F_B$ előjelet vált $\cos\,\alpha_0 = 2/3$, $\alpha_0 = 41^\circ 48'$ értéknél, vagyis a rúd felső vége elhagyja a falat. Ekkor az $A$ pont sebessége maximális: $v_A = 2/3\sqrt{gl}$, a súlypont vízszintes sebessége $v_x = 1/3\sqrt{gl}$.

$\alpha > \alpha_0$ esetén a súlypont végig megőrzi ezt a vízszintes irányú sebesség-komponenst, hiszen $F_B = 0$ miatt ebben az irányban nem gyorsul a rúd.

A súlypont függőleges sebessége $(l/2)\omega\,\sin\,\alpha$, lévén hogy az $A$ végpont végig rajta marad a vízszintes síkon. Az energia-egyenletet most az $\alpha_0$ és $\alpha > \alpha_0$ esetekben írjuk fel:

$$mg(l/2)\cos\,\alpha_0 + 1/2\,mv_0^2 + 1/2\theta_s\,\omega_0^2 = mg(l/2)\cos\,\alpha + (1/2)mv^2 + (1/2)\theta_s\,\omega^2, \tag{12}$$

ahol $v_0 = \dfrac{\sqrt{gl}}{2}$ a súlypont sebessége, $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{g}{l}}$ a pálca szögsebessége az $\alpha_0$ helyzetben, míg ugyanezek a mennyiségek egy tetszés szerinti $\alpha$ helyzetben

$$v = \sqrt{\frac{gl}{9} + \left(\omega \frac{1}{2} \sin \alpha\right)^2},$$

ill. $\omega$. A forgás szögsebessége (12)-ből kifejezhető:

$$\omega = 2 \cdot \sqrt{\frac{g}{l} \cdot \left(\frac{8 - 9 \cos \alpha}{12 - 9 \cos \alpha}\right)}. \tag{13}$$

Ebből az $A$ végpont vízszintes sebessége

$$v_A = \frac{1}{3}\sqrt{gl}\left(1 + 3\sqrt{\frac{8 - 9 \cos \alpha}{12 - 9 \cos^2 \alpha}} \cos \alpha\right), \tag{14}$$

ha $0 < \cos \alpha < 2/3$. Ez a sebesség $\alpha$-nak $\cos \alpha = 2/3$-tól kezdve monoton csökkenő függvénye. A sebesség a $2/3 \sqrt{gl}$ maximális értékről a felére, $1/3 \sqrt{gl}$-re csökken, míg végül a rúd ráfekszik a vízszintes falra.

*Megjegyzés.* A beküldők túlnyomó többsége nem vette észre, hogy a rúd $\cos \alpha = 2/3$-nál elválik a függőleges faltól. Akik csak az elválásig oldották meg a feladatot, 3 pontot kaptak.