A kocsi és a rajta levő láda v_0 állandó sebességgel érkezik a rugó szabad végéhez. (A kocsira ható gördülő és légellenállást elhanyagoljuk.) Ettől kezdve a rugó fékezni fogja a testeket az alábbi összefüggés szerint:

$$2Ma = -Dy, \tag{1}$$

ahol y a rugó összenyomódása, a pedig a kocsi és a láda közös gyorsulása (1. ábra). $\omega_1 = \sqrt{\frac{D}{2M}}$ frekvenciájú harmonikus rezgőmozgás jön létre, amely addig tart, amíg a kocsi el nem hagyja a rugó végét (egy félperiódus után), vagy a láda meg nem csúszik a kocsin.

1986-05-235-2.eps

1. ábra

A rezgés maximális sebessége v_0, így az amplitúdója $A_1 = v_0/\omega_1$. Mérjük az időt a rugó elérésének pillanatától – ekkor a kocsi sebességének időfüggése:

$$v(t) = v_0 \cos\ \omega_1\ t. \tag{2}$$

A láda abban a t_1 időpontban csúszik meg, amikor a rá ható fékezőerő eléri a súrlódási erő maximális μMg értékét:

$$MA_1\omega_1^2\ \sin\ \omega_1\ t_1 = \mu Mg;$$

$$t_1 = \frac{1}{\omega_1}\text{arc sin}\,\frac{\mu g}{v_1\omega_1} = \sqrt{\frac{2M}{D}}\text{arc sin}\,\left(\frac{\mu g}{v_0}\sqrt{\frac{2M}{D}}\right). \tag{3}$$

A megcsúszás pillanatában, amikor a gyorsulás μg, az y_1 kitérésre teljesül, hogy $Dy_1 = 2M\mu g$, innen

$$y_1 = 2\mu Mg/D. \tag{4}$$

A sebesség ugyanekkor

$$v_1 = v_0\ \cos\ \omega_1 t_1 = v_0\sqrt{1-\sin^2\omega_1 t_1} = \sqrt{v_0^2 - \frac{2\mu^2 g^2 M}{D}}. \tag{5}$$

Amennyiben

$$\frac{\mu g}{v_0}\sqrt{\frac{2M}{D}} \geqq 1, \tag{I}$$

a láda nem csúszik meg a kocsin, és $\pi/\omega_1 = \pi\sqrt{2M/D}$ félperiódusnyi idő eltelte után $-v_0$ sebességgel együtt elhagyják a rugót. Közben a sebességük a (2) egyenlet szerint változik (2. ábra).

1986-05-235-3.eps

2. ábra

Ha az (I) egyenlőtlenség nem teljesül, akkora láda megcsúszása után a kocsira ható erő:

$$Ma = -Dy + \mu Mg. \tag{6}$$

Innen a láda gyorsulása:

$$a = -\frac{D}{M}\left(y - \frac{\mu Mg}{D}\right) = -\frac{D}{M}y' \tag{7}$$

ahol $y^{'} = y - \mu Mg/D$. A (7) egyenlet szerint a kocsi t_1 időpont után is harmonikus rezgőmozgást fog végezni, de most $\omega_2 = \sqrt{\frac{D}{M}} = \sqrt{2}\omega_1$ frekvenciával és az $y_o = \mu Mg/D$ nyugvópont körül. Ennek a rezgőmozgásnak az amplitúdója megkapható a t_1-beli kitérésből és sebességből:

$$A_2 = \sqrt{y_1'^2 + (v_1/\omega_2)^2}\ = \tag{8}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\mu Mg}{D}\right)^2 + \frac{M}{D}\left(v_0^2 - \frac{2\mu^2 g^2 M}{D}\right)}\ = \sqrt{\frac{M}{D}}\sqrt{v_0^2 - \mu^2 g^2 M/D}.$$

A t_1 időpontbeli φ_2 fázisszög:

(9) $$\varphi_2 = \text{arc sin } y_1^{'}/A_2.$$

A kocsi sebessége a t_1 időpont után tehát:

(10) $$v(t) = A_2\omega_2 \cos\left[\omega_2(t-t_1)+\varphi_2\right].$$

A láda mozgását a megcsúszás után csak a súrlódási erő befolyásolja, ezért a sebessége ekkor

(11) $$v = v_1 - \mu g(t-t_1).$$

Ha a kocsi elég hosszú, és a láda nem csúszik le, akkor egy idő utána kocsi és a láda sebessége újból egyenlő lesz, és a csúszás megszűnik. Külön tárgyaljuk azt az esetet, amikor (II) a csúszás előbb szűnik meg, mint ahogy a kocsi elhagyja a rugót, és külön azt, amikor (III) a csúszás később szűnik meg. Az utóbbi esetben a rugó elhagyásának t_2 időpontjában a láda sebessége nagyobb, mint a kocsié. Mivel ez a helyzet éppen π fázissal későbbi, mint a t_1-beli,

$$t_2 = t_1 + \pi/\omega_2 = t_1 + \pi\sqrt{\frac{M}{D}},$$

a sebességekre pedig $v_1 - \mu g\pi\sqrt{\frac{M}{D}} > -v_1$, amiből

(III) $$\frac{\mu g}{v_0}\sqrt{\frac{2M}{D}} < \frac{1}{\sqrt{1+\pi^2/8}} \approx 0,6691.$$

A rugó elhagyása után a kocsi sebessége:

(13) $$v(t) = -v_1 + \mu g(t-t_2)$$

t_3 időpontban végül a kocsi és a láda összetapad:

(14) $$-v_1 + \mu g(t_3 - t_2) = v_1 - \mu g(t_3 - t_1).$$

Innen

(15) $$t_3 = \frac{v_1}{\mu g} + \frac{t_1}{2} + \frac{t_2}{2} = t_1 + \frac{\pi}{2\omega_2} + \frac{v_1}{\mu g},$$

a közös sebesség az összetapadás után pedig

(16) $$v_3 = -\frac{\mu g\pi}{2\omega_2} = -\frac{\mu g\pi}{2}\sqrt{\frac{M}{D}}.$$

A (III) feltétel teljesülése esetén a kocsi és a láda sebességének a (2), (10), (11), (13) és (16) egyenlet szerinti időfüggését a 3. ábrán foglaltuk össze. Érdekes, hogy a visszalökődés utáni (16) sebesség nem függ v_0 -tól.

1986-05-236-1.eps

3. ábra

Ha

(II) $$\frac{1}{\sqrt{1+\pi^2/8}} \leqq \frac{\mu g}{v_0}\sqrt{\frac{2M}{D}} < 1,$$

akkor, mint már említettük, a láda előbb tapad a kocsihoz, mint ahogy a kocsi elhagyja a rugót. A csúszás megszűnésének $t_2^{'}$ időpontja a

(17) $$v_1 - \mu g(t_2^{'} - t_1) = A_2\omega_2\cos\left[\omega_2(t_2^{'}-t_1)+\varphi_2\right]$$

egyenletből határozható meg. Az egyenletet algebrai módszerekkel nem lehet megoldani. A konkrét adatok ismeretében $t_2^{'}$ numerikusan meghatározható. $t_2^{'}$ időpontban a kocsi helye és sebessége:

(18) $$y_2 = y_0 + A_2\sin\left[\omega_2(t_2^{'}-t_1)+\varphi_2\right],$$

(19) $$v_2' = A_2\omega_2 \cos\left[\omega_2(t_2' - t_1) + \varphi_2\right].$$

Az összetapadás után a kocsi és a láda újból $\omega_1 = \sqrt{\dfrac{D}{2M}}$ frekvenciával rezeg a rugó nyugalmi helyzete körül. A rezgés új amplitúdója:

$$A_3 = \sqrt{y_2^2 + (v_2'/\omega_1)^2},$$

a fázis a t_2' időpontban pedig:

(21) $$\varphi_3 = \text{arc sin}\ \frac{y_2}{A_3} = \text{arc cos}\ \frac{v_2'}{A_3\omega_1}.$$

A kétféle meghatározással φ_3-at egyértelművé tettük a $[0,\ 2\pi)$ intervallumban. A kocsi és a láda közös sebessége a t_2' időpont után:

(22) $$v(t) = A_3\omega_1\ \cos\left[\omega_1(t - t_2') + \varphi_3\right].$$

A t_3' időpontban a kocsi elhagyja a rugót. Ekkor a rezgés fázisa:

(23) $$\omega_1(t_3' - t_2') + \varphi_3 = \pi,$$

ebből

(24) $$t_3' = t_2' + \frac{\pi - \varphi_3}{\omega_1}.$$

A rugó elhagyása után a kocsi sebessége állandó:

(24) $$v_3' = -A_3\omega_1.$$

A (II) feltétel teljesülése esetén a kocsi és a láda sebességének a (2), (10), (11), (22) és (24) egyenlet szerinti időfüggését a 4. ábrán foglaltuk össze.

1986-05-237-1.eps

4. ábra

Végül nézzük azokat az eseteket, amikor a kocsi nem elég hosszú, és a láda leesik róla! A láda maximális elmozdulása legyen L! A láda leeshet (a) a rugó elhagyása előtt és (b) a rugó elhagyása után.

(a) A megcsúszás után a ládának a kocsihoz viszonyított elmozdulása:

(25) $$l(t) = v_1(t - t_1) - \frac{1}{2}\mu g(t - t_1)^2 - \left\{A_2 \sin\left[\omega_2(t - t_1) + \varphi_2\right] - A_2 \sin\ \varphi_2\right\}.$$

Amennyiben a (II) esetben a t_2', a (III) esetben a t_2 időpont előtt $l(t) > L$ bekövetkezne, a láda lecsúszik a kocsiról. A leesés után a kocsi előbb $\omega_2 = \sqrt{\dfrac{D}{M}}$ frekvenciájú rezgőmozgást végez a rugó nyugalmi helyzete körül, majd a rugó elhagyása után állandó sebességgel halad tovább (lásd a 3. és 4. ábra szaggatott vonalait!).

(b) A (III) esetben a láda még lecsúszhat a rugó elhagyása után is. A t_2 időpont után a ládának a kocsihoz viszonyított elmozdulása:

$$l(t) = v_1(t - t_1) - \frac{1}{2}\mu g(t - t_1)^2 + y_1 - \left[-v_1(t - t_2) + \frac{1}{2}\mu g(t - t_2)^2\right].$$

Ha a t_3 időpont előtt $l(t) > L$ bekövetkezne, akkora láda lecsúszik a kocsiról (lásd a 3. ábra szaggatott vonalát!).

A láda mozgásának lehetőségeit az áttekinthetőség kedvéért az alábbi táblázatban foglaltuk össze:

1986-05-238-1.eps