Tegyük fel, hogy pl. a bal oldali testet jobbra lökjük. A rugó egyensúlyi hossza L.

1986-03-139-1.eps

Írjuk fel a mozgásegyenletet, mindkét testre külön-külön:

$$m_1a_1 = -D[L-(x_2-x_1)] - \mu m_1 g, \tag{1}$$
$$m_2a_2 = D[L-(x_2-x_1)] - \mu m_2 g, \tag{2}$$

ahol a_1 és a_2 az egyes ládák pillanatnyi gyorsulása a talajhoz (0 ponthoz) képest. A pozitív irányt az ábrán jobbra vettük fel, így a súrlódási erők mindkét egyenletben negatív előjelűek, a feladat feltételeivel megegyezően. A két egyenletből kifejezve a_1-et és a_2-t, valamint bevezetve az $x = x_2 - x_1 - L$ rugóhossz-változást, a gyorsulások különbségére a következő egyenletet kapjuk:

$$a = a_2 - a_1 = -D(1/m_1 + 1/m_2)\cdot x,$$

ahol a a ládák relatív gyorsulása.

Bevezetve az $\omega^2 = D(1/m_1 + 1/m_2)$ jelölést, látható, hogy a relatív gyorsulásra kapott mozgásegyenlet olyan csillapítatlan harmonikus rezgőmozgást ír le, amelynek a körfrekvenciája ω. A rezgés egyensúlyi helyzetében $x = x_2 - x_1 - L = 0$.

Ezzel bebizonyítottuk a feladat állítását és egyben meghatároztuk a kialakuló rezgés körfrekvenciáját.

A bizonyítás során kihasználtuk, hogy a súrlódási erők azonos irányúak és a relatív gyorsulás számításánál kiesnek.

Vizsgáljuk meg a súlypont mozgását! Az (1) és a (2) egyenlet összegéből a súlypont gyorsulása:

$$a_s = \frac{m_1a_1 + m_2a_2}{m_1 + m_2} = -\mu g,$$

a rendszer súlypontja μg lassulással halad jobbra.

Ki tudjuk számolni az egyes ládák gyorsulását is a kezdőfeltételek ismeretében. Legyen a lökés utáni pillanatban ($t = 0$) a hátsó láda kezdősebessége v_0. A rugóhossz-változás időfüggése $x(t) = A\cdot\sin\,\omega t + B\cdot\cos\,\omega t$ alakú, ahol A és B a kezdőfeltételekből határozható meg. A relatív sebesség $v(t) = A\omega\cos\,\omega t - B\omega\sin\,\omega t$ módon függ az időtől és a $t = 0$ pillanatban $v(t=0) = A\omega = v_0$. Innen $A = v_0/\omega$. Másrészt $x(t=0) = B = 0$, hiszen még egyensúlyi helyzetben van a rugó. Így a relatív mozgás időfüggése az adott kezdőfeltételekkel $x(t) = (v_0/\omega)\cdot\sin\,\omega t$, a relatív gyorsulása: $a(t) = -v_0\omega\cdot\sin\,\omega t = -\omega^2 x(t)$. Végül a ládák gyorsulása az (1) és (2) egyenletek alapján

$$a_1 = -\mu g + (D/m_1)\cdot(v_0/\omega)\cdot\sin\,\omega t,\quad \text{és}$$
$$a_2 = -\mu g - (D/m_2)\cdot(v_0/\omega)\cdot\sin\,\omega t.$$

Természetesen fentebb leírt mozgás (rezgés) csak addig valósul meg, amíg a testek sebességének iránya valóban a súlypont sebességével azonos irányú.

Ezután a rezgés tovább folytatódik, de ekkor a relatív gyorsulást már befolyásolja a súrlódás, a rezgés csillapított lesz. A rendszer mozgási- és rugóenergiája hő formájában disszipálódik.

Megjegyzés. Többen helyes megoldást adtak, felhasználva a Newton II. törvényének gyorsuló vonatkoztatási rendszerben érvényes alakját. (Lásd Fizika II. tankönyv 118–119. old.) A súlypont gyorsulása $a_s = \sum_i F_i / \sum_i m_i$, ahol az F_i-k a külső erők; $\sum_i F_i = -\mu(m_1+m_2)g$, így $a_s = -\mu g$, az előző megoldással egyezően. Gyorsuló koordinátarendszerben fel kell venni minden egyes testre az ún. fiktív erőket: $F_1 = -m_1a_s$, és $F_2 = -m_2a_s$, amelyek éppen a súrlódási erőkkel egyeznek meg, csak ellentétes irányúak. Tehát ebben a koordináta-rendszerben az egyes testekre csak a rugóerő hat, így a rezgés csillapítatlan lesz.