a) Írjuk fel a henger haladó és forgó mozgására a mozgásegyenleteket!

1986-02-092-1.eps

(1) $$mg\sin\alpha - S - Dx = ma,$$

(2) $$SR = \Theta a/R,$$

ahol S a tapadási súrlódási erő, a a tömegközéppont gyorsulása, x a rugó megnyúlása (amelyeket lefelé tekintünk pozitívnak), és $\Theta = (1/2)mR^2$ a henger tehetetlenségi nyomatéka. Oldjuk meg az egyenletrendszert az S és az a ismeretlenekre!

(3) $$S = -\frac{Dx}{1+mR^2/\Theta} + \frac{mg\ \sin\ \alpha}{1+mR^2/\Theta},$$

(4) $$a = -\frac{Dx}{m+\Theta/R^2} + \frac{mg\ \sin\ \alpha}{m+\Theta/R^2} = -\frac{D}{m+\Theta/R^2}\cdot\left[x - \frac{mg\ \sin\ \alpha}{D}\right].$$

Az utóbbi egyenlet egy $\omega = \sqrt{\dfrac{D}{m+\Theta/R^2}}$ körfrekvenciájú rezgést ír le az $x_0 = mg\ \sin\ \alpha/D$ nyugvópont körül. Behelyettesítve az adatokat: $\omega = 3{,}65\ \mathrm{s}^{-1}$, $f = \omega/2\pi = 0{,}58\ \mathrm{s}^{-1}$ – függetlenül a lejtő hajlásszögétől. A rugó megnyúlása az idő függvényéhen:

(5) $$x = x_0 - x_0\cos\omega t.$$

1986-02-092-2.eps

b) A henger akkor csúszik meg, amikor $|S| > \mu mg\cos\alpha$, és akkor nem csúszik meg, ha a mozgás folyamán végig $|S| \leqq \mu mg\cos\alpha$. A (2) egyenlet szerint az S súrlódási erő arányos a gyorsulással, ezért maximális értékét a rezgés szélső pontjaiban veszi fel:

(6) $$S_{\max} = (\Theta/R^2)a_{\max} = (\Theta/R^2)x_0\omega^2,$$

mivel x_0 egyben a rezgés amplitúdója is. A megcsúszáskor ennek kell nagyobbnak lennie $\mu mg\cos\alpha$-nál. Behelyettesítve az x_0-ra és az ω-ra kapott kifejezéseket, majd Θ értékét:

(7) $$\frac{\Theta}{R^2}\cdot\frac{mg\sin\alpha}{D}\cdot\frac{D}{m+\Theta/R^2} > \mu g\cos\alpha,$$
$$\mathrm{tg}\ \alpha > (mR^2/\Theta + 1)\mu = 3\mu.$$

$\mu = 1/3$ esetén: $\mathrm{tg}\alpha > 1$, $\alpha > 45^\circ$. Tehát $\alpha > 45^\circ$ esetén biztosan megcsúszik a henger, és 45°-nál kisebb hajlásszögű lejtőn még nem csúszik meg a henger.