a) A töltések elrendezése legyen az 1. ábrán látható! A 2. dipólusra ható erő a töltéseire ható Coulomb-erők előjeles összege, mivel minden erő a dipólusokat összekötő egyenes mentén hat. Az erő pozitív, ha az ábra jobb oldala felé mutat.

1986-01-033-1.eps

1. ábra

A 2. dipólus pozitív töltésére ható erő:

(1)
$$F_+ = kQ^2\left[\frac{1}{\left(r-\frac{d_1}{2}-\frac{d_2}{2}\right)^2}-\frac{1}{\left(r+\frac{d_1}{2}-\frac{d_2}{2}\right)^2}\right]=$$
$$=\frac{kQ^2}{r^2}\left[\frac{1}{\left\{1-\frac{(d_1+d_2)}{2r}\right\}^2}-\frac{1}{\left\{1+\frac{(d_1-d_2)}{2r}\right\}^2}\right].$$

A 2. dipólus negatív töltésére ható erő:

(2)
$$F_- = kQ^2\left[\frac{1}{\left(r+\frac{d_1}{2}+\frac{d_2}{2}\right)^2}-\frac{1}{\left(r-\frac{d_1}{2}+\frac{d_2}{2}\right)^2}\right]=$$
$$=\frac{kQ^2}{r^2}\left[\frac{1}{\left\{1+\frac{(d_1+d_2)}{2r}\right\}^2}-\frac{1}{\left\{1-\frac{(d_1-d_2)}{2r}\right\}^2}\right].$$

Így a 2. dipólusra ható erő

(3)
$$F_2 = F_+ + F_-.$$

Tudjuk, hogy $d_1 \ll r,\ \ d_2 \ll r$, ezért $\frac{d_1}{r} \ll 1,\ \ \frac{d_2}{r} \ll 1.$

Használjuk fel az ismert

(4)
$$(1+\varepsilon)^n = 1 + n\varepsilon + \delta(\varepsilon^2), \quad \text{ha} \quad \varepsilon \ll 1$$

közelítést! Ekkor

$$F_+ = \frac{kQ^2}{r^2}\left\{1+\frac{d_1+d_2}{r}+\delta O\left[\left(\frac{d_1+d_2}{r}\right)^2\right]\right\}-\frac{kQ^2}{r^2}\left\{1-\frac{d_1-d_2}{r}+\delta O\left[\left(\frac{d_1-d_2}{r}\right)^2\right]\right\}=$$
$$=\frac{kQ^2}{r^2}\left[\frac{2d_1}{r}+\delta O\left(\frac{d^2}{r^2}\right)\right],$$

ahol az $\delta O(d^2/r^2)$ szimbólum azt jelzi, hogy az elhanyagolt tagok a d_1/r és d_2/r kicsiny mennyiségek szorzatát vagy többszörös szorzatát tartalmazhatják csak.

Ugyanilyen pontosságig:

$$F_- = \frac{kQ^2}{r^2}\left\{1-\frac{d_1+d_2}{r}+\delta O\left(\frac{d^2}{r^2}\right)\right\}-\frac{kQ^2}{r^2}\left\{1+\frac{d_1-d_2}{r}+\delta\left(\frac{d^2}{r^2}\right)\right\}=$$
$$=\frac{kQ^2}{r^2}\left[-\frac{2d_1}{r}+\delta\left(\frac{d^2}{r^2}\right)\right].$$

A dipólusra ható erő:

$$F_2 = F_+ + F_- = \frac{kQ^2}{r^2}\,\delta\left(\frac{d^2}{r^2}\right).$$

Azt tapasztaljuk, hogy a kiszámított tagok éppen kiejtették egymást, az eredmény csak az elhanyagolt tagok nagyságrendjéről ad felvilágosítást. Az (1)–(3) kifejezésekből látható, hogy F_2 nem pontosan 0, így közelítésünk túl durva volt. Pontosabb közelítést kaphatunk, ha a (4) összefüggést $\delta(\varepsilon^3)$ pontosságig írjuk fel, és ezt alkalmazzuk F_2 kiértékelésére. Azonban egy egyszerűbb módon is célhoz érhetünk. (1) és (2) összeadásával, közös nevezőre hozás után az F_2 erőre az

$$F_2=\frac{2kQ^2}{r^2}\left\{\frac{1+\left(\frac{d_1+d_2}{2r}\right)^2}{\left[1-\left(\frac{d_1+d_2}{2r}\right)^2\right]^2}-\frac{1+\left(\frac{d_1-d_2}{2r}\right)^2}{\left[1-\left(\frac{d_1-d_2}{2r}\right)^2\right]^2}\right\}$$

összefüggést nyerjük. A zárójel mindkét tagja $\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}$ alakú, ahol $x\ll 1$.
A közelítő számítás összefüggéseit használva :

$$\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}=(1+x^2)[1+2x^2+\delta(x^4)]=$$
$$=1+x^2+2x^2+2x^4+\delta(x^4)+x^2\delta(x^4)=1+3x^2+\delta(x^4).$$

Ennek alapján

$$F_2=\frac{2kQ^2}{r^2}\left\{\left[1+3\left(\frac{d_1+d_2}{2r}\right)^2+\delta\left(\frac{d^4}{r^4}\right)\right]-\left[1+3\left(\frac{d_1-d_2}{2r}\right)^2+\delta\left(\frac{d^4}{r^4}\right)\right]\right\}=$$
$$=\frac{2kQ^2}{r^2}\left[\frac{12d_1d_2}{4r^2}+\delta\left(\frac{d^4}{r^4}\right)\right]=\frac{6kQ^2d_1d_2}{r^4}+\frac{2kQ^2}{r^2}\delta\left(\frac{d^4}{r^4}\right).$$

Ez a 2. dipólusra ható erő legalacsonyabb rendű közelítése. Mivel $d_1\ll r$, $d_2\ll r$, ezért azt mondhatjuk, hogy jó közelítéssel

$$F_2\approx\frac{2kQ^2d_1d_2}{r^4}.$$

Az 1. dipólusra ható erő ugyanekkora, csak ellentétes irányú. A fenti eredmény előjele pozitív, tehát a dipólusok taszítják egymást.

1986-01-034-1.eps

2. ábra

b) A töltések elrendezése legyen a 2. ábrán látható! Az ábra szimmetrikus elrendezése miatt a 2. dipólus pozitív töltésére ható erők eredője balra mutat, míg a negatív töltésre hatóké jobbra mutat. Ezen két erő eredője hat a 2. dipólusra, ami nyilvánvalóan merőleges lesz a két dipólust összekötő egyenesre. Az erő pozitív, ha az ábrán balra mutat.

A rajz jelöléseivel

$$F_2=F_+-F_-,\quad F_+=2F_{++}\sin\alpha,\quad F_-=2F_{--}\sin\beta,$$

ahol

$$F_{++}=\frac{kQ^2}{\left(r-\frac{d_2}{2}\right)^2+\left(\frac{d_1}{2}\right)^2},\quad F_{--}=\frac{kQ^2}{\left(r+\frac{d_2}{2}\right)^2+\left(\frac{d_1}{2}\right)^2},$$
$$\sin\alpha=\frac{d_1/2}{\sqrt{\left(r-\frac{d_2}{2}\right)^2+\left(\frac{d_1}{2}\right)^2}},\quad \sin\beta=\frac{d_1/2}{\sqrt{\left(r+\frac{d_2}{2}\right)^2+\left(\frac{d_1}{2}\right)^2}}.$$

Felhasználva az előbbi összefüggéseket:

$$F_2 = kQ^2 d_1 \left\{ \frac{1}{\left[\left(r - \frac{d_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_1}{2}\right)^2\right]^{3/2}} - \frac{1}{\left[\left(r + \frac{d_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_1}{2}\right)^2\right]^{3/2}} \right\} =$$

$$= \frac{kQ^2 d_1}{r^3} \left[\frac{1}{\left(1 - \frac{d_2}{r} + \frac{d_1^2 + d_2^2}{4r^2}\right)^{3/2}} - \frac{1}{\left(1 + \frac{d_2}{r} + \frac{d_1^2 + d_2^2}{4r^2}\right)^{3/2}} \right].$$

Számoljuk ki az első tagot $\delta(d^2/r^2)$ pontosságig:

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{d_2}{r} + \frac{d_1^2 + d_2^2}{4r^2}\right)^{3/2}} = \frac{1}{\left[1 - \frac{d_2}{r} + \delta\left(\frac{d^2}{r^2}\right)\right]^{3/2}} =$$

$$= 1 + \frac{3}{2}\left[\frac{d_2}{r} + \delta\left(\frac{d^2}{r^2}\right)\right] + \delta\left\{\left[\frac{d_2}{r} + \delta\left(\frac{d^2}{r^2}\right)\right]^2\right\} = 1 + \frac{3}{2} \cdot \frac{d_2}{r} + \delta\left(\frac{d^2}{r^2}\right).$$

Ugyanígy számolva a másik tagot:

$$\frac{1}{\left(1 + \frac{d_2}{r} + \frac{d_1^2 + d_2^2}{4r^2}\right)^{3/2}} = 1 + \frac{3}{2} \cdot \frac{d_2}{r} + \delta\left(\frac{d^2}{r^2}\right).$$

Visszahelyettesítve

$$F_2 = \frac{kQ^2 d_1}{r^3}\left\{\left[1 + \frac{3d_2}{2r} + \delta\left(\frac{d^2}{r^2}\right)\right] - \left[1 - \frac{3d_2}{2r} + \delta\left(\frac{d^2}{r^2}\right)\right]\right\} =$$

$$= \frac{kQ^2 d_1}{r^3}\left[\frac{3d_2}{r} + \delta\left(\frac{d^2}{r^2}\right)\right] = \frac{3kQ^2 d_1 d_2}{r^3} + \frac{kQ^2}{r^2}\delta\left(\frac{d^3}{r^3}\right).$$

Tehát jó közelítéssel

$$F_2 \approx \frac{3kQ^2 d_1 d_2}{r^3}.$$

Az erő előjele pozítív, így a 2. dipólusra ható erő merőleges az összekötő szakaszra és balra mutat.