a) Az elrendezés szimmetriája miatt nyilvánvaló, hogy a feladatban megadott e egyenes mentén a térerősségnek csak az egyenes irányába eső komponense van, amely a négy ponttöltés által keltett térerősség összege. Ez a négyzet síkjától $\overline{OP}=z$ távolságra levő P pontban (l. az ábrát):

$$E_z=4\frac{kQ}{r^2}\cos\alpha=4kQ\frac{z}{\left(\dfrac{a^2}{2}+z^2\right)^{3/2}},\tag{1}$$

ahol k a Coulomb állandó.

1985-11-414-2.eps

b) Ha $z\ll a$, a akkor a térerősség (1) kifejezésében

$$a^2/2+z^2\approx a^2/2,$$

így a P pontba helyezett q töltésre

$$F_z=Eq\approx 8\sqrt{2}k\frac{Qq}{a^3}z\tag{2}$$

erő hat. Ha feltételezzük, hogy $Qq<0$ (ellentétes előjelű töltések) és a gravitációtól eltekintünk, akkor az m tömegű, q töltésű test mozgásegyenlete a (2) egyenlet alapján

$$a_z=F_z/m=-\omega^2z$$

alakba írható, amely a rezgőmozgás dinamikai feltétele, ahol

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=\sqrt{k\frac{8\sqrt{2}|Qq|}{a^3m}}.\tag{3}$$

Adatainkkal (3)-ból a rezgés körfrekvenciája, illetve periódusideje

$$\omega\approx 1{,}3\cdot 10^{16}\ (1/\mathrm{s}),\quad T=4{,}7\cdot 10^{-16}\ \mathrm{s}.$$

c) Van olyan irány, amelybe a q töltésű testet kimozdítva az O középpontból, az a kimozdítás irányában gyorsul tovább. Ezt a következőképpen láthatjuk be: Helyezzük a q töltést a négyzet átlóján levő R pontba! Az $\overline{OR}=x$, $\overline{OC}=a/\sqrt{2}=b$ jelölésekkel a test helyzeti energiája az R pontban

$$\begin{aligned}V_R(x)&=kQq\left(\frac{1}{\overline{AR}}+\frac{1}{\overline{CR}}+\frac{1}{\overline{BR}}+\frac{1}{\overline{DR}}\right)=\\&=kQq\left(\frac{1}{b-x}+\frac{1}{b+x}+\frac{2}{\sqrt{b^2+x^2}}\right).\end{aligned}\tag{4}$$

Mivel

$$\begin{aligned}V_R'(x)&=kQq\left[\frac{1}{(b-x)^2}-\frac{1}{(b+x)^2}-\frac{2x}{(b^2+x^2)^{3/2}}\right]=\\&=2kQqx\left[\frac{2b}{(b^2-x^2)^2}-\frac{1}{(b^2+x^2)^{3/2}}\right],\end{aligned}$$

azért $V_R'(0)=0$; továbbá az $x=0$ hely egy kis környezetében

$$x<0 \text{ esetén } V_R(x)>0,\quad x>0 \text{ esetén } V_R(x)<0,\tag{5}$$

ugyanis $Qq<0$, és a legutóbbi szögletes zárójelben álló kifejezés az $x=0$ hely egy környezetében pozitív, mivel $x=0$ esetén értéke $1/b^3>0$. Ez azt jelenti, hogy a V_R függvénynek a 0 helyen lokális maximuma van, tehát a q töltés kis elmozdítása helyzeti energia csökkenéssel jár, vagyis az egyensúlyi helyzet az O pontban instabil. Másrészt világos, hogy a q töltésre az R pontban ható erők eredője átlóirányú, így $\overline{OR}$ valóban a kívánt irány.

Hasonló számolással kimutatható, hogy a négyzet középvonalai mentén történő (kis) elmozdítások esetén is teljesül a kívánt feltétel.