Legyen x_1 és x_2 a bal, illetve a jobb oldali rugó megnyúlása az egyensúlyi helyzethez képest (1. ábra)! (A rugók egyensúlyi hosszába beleértjük a rúd súlya által okozott $Mg/2k$ megnyúlást, ezért a súlyerőt a mozgásegyenletekben nem fogjuk figyelembe venni.)

1985-11-413-1.eps

1. ábra

A rúd tömegközéppontjának a gyorsulására és a tömegközéppont körüli β szöggyorsulásra felírt mozgásegyenletek:

$$Ma = -kx_1 - kx_2,$$
$$(1/12)Ml^2\beta = (l/2)x_1k - (l/2)x_2k,$$

ahol $Ml^2/12$ a rúd tehetetlenségi nyomatéka. Az x_1 és x_2 elmozdulás kifejezhető a rugó tömegközéppontjának x elmozdulásával és a tömegközéppont körüli elfordulás φ szögével. Kis φ szögekre

$$x_1 = x - (l/2)\varphi; \quad x_2 = x + (l/2)\varphi.$$

Behelyettesítve a mozgásegyenletekbe:

$$a = -(2k/M)x; \qquad \beta = -(6k/M)\varphi.$$

A két egyenletből leolvasható, hogy a rúd mozgása kétféle harmonikus rezgőmozgás összetétele: $\omega = \sqrt{2k/M}$ frekvenciával rezeg a rúd tömegközéppontja függőleges irányban, és $\sqrt{3}\omega$ frekvenciával forgó rezgést végez a rúd tömegközéppontja körül.

A rúd két végének elmozdulása, figyelembe véve, hogy a kezdő pillanatban

$x_1 = x_0$, $x_2 = 0$, $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$;

$$x_{1,2} = x \pm \frac{\varphi l}{2} = \frac{x_0}{2}(\cos\omega t \pm \cos\sqrt{3}\omega t),$$

azaz

$$x_1 = x_0 \cos\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\omega t\right)\cos\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\omega t\right),$$
$$x_2 = x_0 \sin\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\omega t\right)\sin\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\omega t\right),$$

Megjegyzések. 1. A kitérések időfüggését ábrázolva (2. ábra) a csatolt rezgésekre jellemző lebegést figyelhetjük meg. Ez arra utal, hogy a rendszer felfogható harmonikus oszcillátorok csatolásaként is: a rúd jobb fele a jobb oldali rugóval, a bal fele pedig a bal oldali rugóval egy-egy oszcillátor. A csatolást köztük az okozza, hogy a rúd két felét mereven összeerősítették; a csatolás erős, ezért a lebegési frekvencia nem sokkal nagyobb az alapfrekvenciánál.

1985-11-413-2.eps

2. ábra

2. x-et és φ-t a rendszer normálkoordinátáinak nevezzük. Bebizonyítható, hogy ha egy tetszőleges mechanikai rendszerre ható erők a stabil egyensúlyi helyzetből való kitéréseknek lineáris függvényei (a rugalmas erők ilyenek), akkor mindig található a független koordinátákkal megegyező számú normálkoordináta, amelyeket az jellemez, hogy egymástól függetlenül közönséges harmonikus rezgőmozgást végeznek.