I. megoldás. Számítsuk ki egy tetszőleges hosszúságú, felezőpontjában alátámasztott karikadarab lengésidejét (1. ábra)!

1985-05-236-1.eps

1. ábra

Egy fizikai inga lengésideje:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{\Theta}{Mgs}},$$

ahol Θ az alátámasztási pontra vonatkozó tehetetlenségi nyomaték, M az inga tömege, s a súlypont és az alátámasztási pont távolsága, g pedig a nehézségi gyorsulás.

Θ-t a Steiner-tétel kétszeri alkalmazásával kaphatjuk meg. A kör középpontjára vonatkozó tehetetlenségi nyomaték

$$\Theta_0=Mr^2,$$

ahol r a kör sugara. A súlypontra vonatkozó tehetetlenségi nyomaték

$$\Theta_s=\Theta_0-M(r-s)^2,$$

az alátámasztási pontra vonatkozó tehetetlenségi nyomaték:

$$\Theta=\Theta_s+Ms^2=2Mrs.$$

Ezt behelyettesítve a lengésidő képletébe

$$T=2\pi\sqrt{\frac{2Mrs}{Mgs}}=2\pi\sqrt{\frac{2r}{g}},$$

tehát T csak a karika sugarától függ, az ív hosszától nem, így a két karikadarab lengésideje egyenlő.

II. megoldás. Először számítsuk ki a következő test lengésidejét: Egy súlytalan drótból hajlított körívdarab két végére egyforma m tömegpontokat helyezünk. Az ívet a közepén támasztjuk alá (2. ábra).

1985-05-237-1.eps

2. ábra

Az alátámasztási pontra vonatkozó tehetetlenségi nyomaték

$$\Theta=2ml^2=2m(2r\sin\alpha)^2.$$

A súlypont és az alátámasztási pont távolsága:

$$s=l\sin\alpha=2r\sin^2\alpha.$$

Az inga lengésideje tehát

$$T=2\pi\sqrt{\frac{\Theta}{2mgs}}=2\pi\sqrt{\frac{2r}{g}}.$$

1985-05-237-2.eps

3. ábra

T nem függ a körív középponti szögétől, csak a sugarától, tehát sok, különböző középponti szögű ívet (3. ábra) lengethetünk úgy, hogy a különböző ingák kitérési szögei minden időpillanatban megegyezzenek. A mozgáson az sem változtat, ha ezeket az ingákat összeerősítjük. Sok ilyen ingából összeállíthatunk olyan homogén tömegeloszlású gyűrűdarabokat, amilyenek a feladat szövegében szerepelnek, tehát ezek lengésideje is $T=2\pi\sqrt{\frac{2r}{g}}$, az ív középponti szögétől függetlenül.

III. megoldás. Bontsuk fel a karikadarabot kis részekre, s ezeket helyettesítsük tömegközéppontokkal. A karikadarabnak a felezőpontjára vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát közelíthetjük az egyes tömegpontok tehetetlenségi nyomatékának összegével:

$$\Theta\approx\sum_i m_il_i^2=\sum_i m_i2ry_i=2r\sum_i m_iy_i,$$

ahol y_i az m_i tömegpont y-koordinátája (4. ábra); ugyanis a derékszögű háromszög befogója az átfogónak és az átfogóra eső vetületének mértani közepe. A körív szimmetriája miatt nyilvánvaló, hogy súlypontja az y-tengelyre esik.

1985-05-238-1.eps

4. ábra

A súlypont y-koordinátája:

$$s=\left(\sum_i m_i y_i\right)\Big/\left(\sum_i m_i\right).$$

Az inga tömege:

$$M=\sum_i m_i.$$

Számítsuk ki a lengésidőt

$$T=2\pi\sqrt{\frac{\Theta}{Mgs}}\approx 2\pi\sqrt{\frac{2r\sum\limits_i m_i y_i}{\left(\sum\limits_i m_i\right)g\left(\sum\limits_i m_i y_i\right)\Big/\left(\sum\limits_i m_i\right)}}=2\pi\sqrt{\frac{2r}{g}}.$$

A kapott érték független a karikadarab felbontásától, így a felosztás finomítása során adódó határérték is ugyanaz lesz, $T=2\pi\sqrt{\frac{2r}{g}}$. Tehát a lengésidő egyenlő mindkét karikadarabra.

Megjegyzés. Az eredmény mindenféle tömegeloszlású (pl. változó vastagságú) körívre igaz, ha az alátámasztási pontot a súlyponton átmenő sugár végpontjába helyezzük (vagyis ha a súlypont az y-tengelyre esik).