Amikor a kocka úszik a vízen, a gumiszál feszítetlen, ezért a kockára ható $G=mg=\varrho_{\text{kocka}}\cdot a^3\cdot g$ súlyerő és az Arkhimédész törvénynek megfelelő $F=\varrho_{\text{víz}}\cdot a^2\cdot(a/4)\cdot g$ felhajtóerő eredője zérus:

(1) $$F-G=\varrho_{\text{víz}}\cdot a^2\cdot(a/4)\cdot g-\varrho_{\text{kocka}}\cdot a^3\cdot g=0,$$

ahol ϱ a sűrűség, g a gravitációs állandó (1. a) ábra)

1985-02-086-2.eps

1.a ábra

A fenti egyenletből

$$\varrho_{\text{kocka}}=\varrho_{\text{víz}}/4=250\ \text{kg/m}^3,$$

és a kocka m tömege

$$m=\varrho_{\text{kocka}}\cdot a^3=0{,}25\ \text{kg}.$$

1985-02-086-3.eps

1.b ábra

Ha most kockánkat egyensúlyi helyzetéhez képest x mélységre lenyomjuk (1. b) ábra), akkor arra a megnövekedett F_1 felhajtóerő és a változatlan G súlyerő hat, így a mozgásegyenlet (a vektorok irányát úgy jellemezzük, hogy a felfelé mutató vektorokat vesszük pozitívnak):

(2) $$ma_x=F_1-G=\varrho_{\text{víz}}\cdot a^2\cdot x\cdot g+F-G=\varrho_{\text{víz}}\,a^2\cdot x\cdot g,$$

hiszen $F-G=0$ az (1) egyenlet miatt.

A (2) összefüggés egy

(3) $$T_1=\frac{2\pi}{\omega_1}=2\pi\sqrt{\frac{m}{\varrho_{\text{víz}}\cdot a^2 g}}=2\pi\sqrt{\frac{\varrho_{\text{kocka}}a^3}{\varrho_{\text{víz}}\cdot a^2\cdot g}}=2\pi\sqrt{\frac{\varrho_{\text{kocka}}}{\varrho_{\text{víz}}}\cdot\frac{a}{g}}=\frac{\pi}{10}\ \text{s}$$

periódusidejű harmonikus rezgés mozgásegyenlete.

1985-02-086-4.eps

1.c ábra

Ez a meggondolás azonban nem érvényes akkor, amikor a kocka a D direkciós erejű gumiszál megfeszítése közben eredeti egyensúlyi helyzete fölé kerül (1. c) ábra). Ekkor a mozgásegyenlet

(4) $$ma_{\text{y}}=F_2-G-Dy=F-\varrho_{\text{víz}}\cdot a^2\cdot y\cdot g-G-Dy=-(\varrho_{\text{víz}}a^2g+D)y,$$

ahol ismét felhasználtuk, hogy $F-G=0$.

A (4) mozgásegyenlet ismét egy harmonikus rezgőmozgást ír le

(5) $$T_2=\frac{2\pi}{\omega_2}=2\pi\sqrt{\frac{m}{\varrho_{\text{víz}}a^2g+D}}=\frac{\pi}{10\sqrt{2}}\ \text{s},$$

periódusidővel.

1985-02-087-1.eps

2. ábra

A kocka mozgása tehát két különböző frekvenciájú, egymást félperiódusonként felváltva követő harmonikus rezgőmozgás (2. ábra), amelynek T periódusideje

$$T=\frac{T_1}{2}+\frac{T_2}{2}=\frac{\pi}{20}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\approx 0{,}27\text{s}.$$

Megjegyzés. Számolásunk során végig feltételeztük, hogy a kocka állandóan érintkezik a vízzel. Mi ennek a feltétele? Ha a kocka maximális kitérése a rezgőmozgás során lefelé A_1, felfelé A_2, akkor az egyensúlyi helyzeten való áthaladáskor mozgási energiája

$$E_{\text{mozg}}=(1/2)mA_1^2\omega_1^2=(1/2)mA_2^2\omega_2^2,$$

ahonnan

$$(6) \qquad A_1 = A_2 \frac{\omega_2}{\omega_1} = A_2 \frac{T_1}{T_2} = A_2 \sqrt{2}.$$

A kocka akkor érintkezik mozgása során a vízzel, ha A_2 nem nagyobb, mint $A_{2\,\max} = (1/4)a$, így kezdetben a kockát legfeljebb $A_{1\,\max} = A_{2\max} \cdot \sqrt{2} = (a/4) \cdot \sqrt{2} = 0{,}35$ dm-rel nyomhatjuk lejjebb.

Megjegyzés. A valóságban a kocka rezgése során a víz egy része is rezgésbe jön, és így a tényleges rezgő tömeg nagyobb, mint a kocka tömege. A valóságban tehát a periódusidő a fenti értéknél valamivel nagyobb lesz.