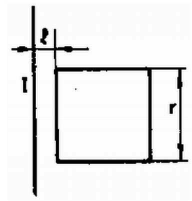
a) A vezetőkeretben indukált U feszültséget az

$$U=\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}, \tag{1}$$

összefüggésből számíthatjuk, ahol Φ az egyenes vezető által a keret belsejében keltett $\mathbf{B}_v$ mágneses indukció fluxusa.



Ismeretes, hogy az I árammal átjárt igen hosszú egyenes vezetőtől x távolságra

$$|\mathbf{B}_v|=\frac{\mu_0 I}{2\pi x}, \tag{2}$$

(μ_0 a vákuum permeabilitása).

1985-01-040-1.eps

Φ meghatározása céljából osszuk fel a keretet – egyszerűség kedvéért – egyenlő (r/n) alapú, r magasságú „vékony" téglalapokra (l. az ábrát!). A vezetőtől számított i-edik téglalapban elég nagy n esetén $\mathbf{B}_v$ közelítőleg állandó, mégpedig (2) miatt alkalmas ξ_i-vel

$$|\mathbf{B}_v|=\frac{\mu_0 I}{2\pi\xi_i},$$

ahol $r_{i-1}<\xi_i<r_i,\ r_i=1+ir/n.$

Tehát az egész keret fluxusát elég nagy n esetén közelíti

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\mu_0 I}{2\pi\xi_i}\cdot\frac{r}{n}\cdot r=\frac{\mu_0 I r}{2\pi}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\xi_i}\cdot\frac{r}{n}.$$

Ismeretes, hogy

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\xi_i}\cdot\frac{r}{n}=\int\limits_{l}^{l+r}\frac{1}{x}\,dx=\ln(l+r)-\ln\ l=\ln\left(1+\frac{r}{l}\right),$$

tehát

$$\Phi=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\mu_0 I}{2\pi\xi_i}\cdot\frac{r}{n}r=\frac{\mu_0 I r}{2\pi}\ln\left(1+\frac{r}{l}\right). \tag{3}$$

Ezért (1) és (3) alapján

$$U=\frac{\mu_0 r}{2\pi}\ln\left(1+\frac{r}{l}\right)\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}. \tag{4}$$

A feladat szerint $I=k\cdot t$ ($k=10^3\,\mathrm{A/s}$), így (4)-ből adatainkkal a keretben indukált feszültség

$$U=6,44\cdot 10^{-5}\,\mathrm{V}.$$

A feszültség időben állandó, ezért a vezetőkeretben folyó I_k áram is időfüggetlen,

$$I_k=\frac{U}{R}=\frac{6,44\cdot 10^{-5}\,\mathrm{V}}{10^{-3}\,\Omega}=6,44\cdot 10^{-2}\,\mathrm{A}. \tag{5}$$

b) Lenz törvénye értelmében a keret O középpontjában az egyenes vezető által keltett $\mathbf{B}_v$ és a keretben folyó áram által létrehozott $\mathbf{B}_k$ mágneses indukció ellentétes irányú, így az eredő indukció

$$\mathbf{B}=\mathbf{B}_v-\mathbf{B}_k=\mathbf{0},$$

ha

(6) $$|\mathbf{B}_v| = |\mathbf{B}_k|.$$

A $\mathbf{B}_k$ indukciót a Biot–Savart-törvényből számíthatjuk. Szimmetria okok miatt nyilván elegendő a keret pl. AB szakasza által keltett $\mathbf{B}_k^{AB}$ értéket kiszámítani, ekkor

(7) $$|\mathbf{B}_k| = 4 \cdot |\mathbf{B}_k^{AB}| = 4 \cdot \frac{\mu_0 I_k}{4\pi} \int\limits_{AB} \frac{\cos\alpha}{a^2}\,\mathrm{d}y = \frac{2\mu_0 I_k}{\pi r} \int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos\alpha\,\mathrm{d}\alpha = 2\sqrt{2}\frac{\mu_0 I_k}{\pi r},$$

ahol felhasználtuk az $a = \dfrac{r}{2\cdot\cos\alpha}$, $y = \dfrac{r}{2}\operatorname{tg}\alpha$, $\mathrm{d}y = \dfrac{r}{2\cdot\cos^2\alpha}\,\mathrm{d}\,\alpha$ összefüggéseket (l. az ábrát!).

A (2) egyenlethez hasonlóan a $\mathbf{B}_v$ indukció az O pontban

$$|\mathbf{B}_v| = \frac{\mu_0 I}{2\pi(l + r/2)}.$$

Ezt és a (7) kifejezést (6)-ba írva és kihasználva, hogy $I = k \cdot t$, kapjuk:

$$|\mathbf{B}_v| = \frac{\mu_0 k \cdot t}{2\pi(l + r/2)} = 2\sqrt{2}\frac{\mu_0 I_k}{\pi r} = |\mathbf{B}_k|.$$

Rendezve, a keresett időpont

$$t = \frac{4\cdot\sqrt{2}(l + r/2)}{k\cdot r} I_k = \frac{4\cdot\sqrt{2}\cdot 0,15\,\mathrm{m}}{10^3(\mathrm{A/s})\cdot 0,2\,\mathrm{m}} \cdot 6,44\cdot 10^{-2}\,\mathrm{A} = 2,73\cdot 10^{-4}\,\mathrm{s},$$

az $I = 0$-hoz tartozó időpontot követően.