A melegítés során a négyzetből rombusz lett, ebből arra következtethetünk (l. a megjegyzést), hogy a két kitüntetett irány az átlók iránya (1. ábra).

1984-12-475-1.eps

1. ábra

Így
$A'C' = AC(1+\alpha_1 t) = a\sqrt{2}(1+\alpha_1 t)$ és $B'D' = BD(1+\alpha_2 t) = a\sqrt{2}(1+\alpha_2 t)$.
A két egyenletet egymással elosztva a rombusz átlóinak arányát, $(1+\varepsilon)-t$ kapjuk:

$$1+\varepsilon = \frac{A'C'}{B'D'} = \frac{1+\alpha_1 t}{1+\alpha_2 t}.$$

Innen

$$\frac{\varepsilon}{t} = \frac{\alpha_1-\alpha_2}{1+\alpha_2 t}.$$

Mivel $\alpha_2 t \ll 1$, az előző egyenlőség helyett az alábbi közelítést vehetjük:

(1)
$$\frac{\varepsilon}{t} \approx \alpha_1 - \alpha_2.$$

A négyzet oldalának tágulására igaz, hogy az átlók által megszabott mértékben tágul. Így

$$A'B' = \sqrt{(AO)^2(1+\alpha_1 t)^2 + (BO)^2(1+\alpha_2 t)^2} = \frac{a}{\sqrt{2}}\sqrt{(1+\alpha_1 t)^2+(1+\alpha_2 t)^2}.$$

A négyzetre emelést elvégezve és a másodfokú tagokat elhanyagolva nyerjük, hogy

$$A'B' = a\sqrt{1+(\alpha_1+\alpha_2)t}.$$

Használjuk a $\sqrt{1+x} \approx 1+\frac{x}{2}$ közelítést ($x \ll 1$)! Így

$$A'B' = a\left(1+\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}t\right).$$

A feladat szövege alapján $\Delta = \frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}t$, vagyis

(2)
$$\frac{2\Delta}{t} = \alpha_1+\alpha_2.$$

(1) és (2) alapján

$$\alpha_1 = \frac{1}{2t}(2\Delta+\varepsilon) \qquad \text{és} \qquad \alpha_2 = \frac{1}{2t}(2\Delta-\varepsilon).$$

Megjegyzés. A megoldás első állításának (a két kitüntetett irány az átló) igazolására vegyünk fel egy koordinátarendszert a kitüntetett irányokba mutató tengelyekkel (2. ábra)!

1984-12-476-1.eps

2. ábra

Vizsgáljuk meg, hogy az egyik tengellyel szöget bezáró szakasz hogyan tágul!
A megoldásban említettek szerint

$$l = \sqrt{l_0^2\cos^2\beta(1+\alpha_1 t)^2 + l_0^2\sin^2\beta(1+\alpha_2 t)^2} \approx l_0\sqrt{1+2l(\alpha_1\cos^2\beta+\alpha_2\sin^2\beta)} \approx$$
$$\approx l_0[1+(\alpha_1\cos^2\beta+\alpha_2\sin^2\beta)t].$$

Így az „eredő” hőtágulási együttható

$$\alpha = \alpha_1\cos^2\beta + \alpha_2\sin^2\beta = \alpha_1 + (\alpha_2-\alpha_1)\sin^2\beta.$$

Mivel esetünkben a négyzet oldalai egyenlően tágultak, $\sin^2\beta$ minden oldalra egyforma. Ez pedig azt jelenti, hogy a két kitüntetett irány megfelel az átlóknak.