I. megoldás. A mágneses indukció kiszámításához először meg kell határozni az élekben folyó áramokat. Az 1. ábrán feltüntettük az egyes áramokat és irányukat. Az áramforrást a kocka A, B csúcsaira kötöttük.

1984-11-423-1.eps

1. ábra

1984-11-424-1.eps

2. ábra

Szimmetriaokok miatt a D és E pontok, valamint a C és F pontok ekvipotenciálisak, így összeköthetők egy zérus ellenállású huzallal. A kapott ellenálláshálózatot a 2. ábra mutatja. (Az ellenállásokba írt számok az 1. ábra áramainak sorszámozásával vannak összhangban.) A kiterített hálózat segítségével a Kirchhoff-törvények alapján könnyen meghatározhatjuk az egyes élekben folyó áramokat, ezek a következők:

$$\begin{aligned}
&I_1 = 2\,\mathrm{A},\\
&I_2 = I_3 = I_5 = I_6 = (5/7)\,\mathrm{A},\\
&I_4 = I_7 = (4/7)\,\mathrm{A},\\
&I_8 = I_9 = I_{10} = I_{11} = (1/7)\,\mathrm{A},\\
&I_{12} = (2/7)\,\mathrm{A}.
\end{aligned}$$

Az áramok irányait az 1. ábra mutatja.

A kocka középpontjából minden él azonos látószögben látszik és minden él azonos távolságra van ettől a ponttól. A mágneses indukciót a Biot–Savart-törvénnyel számítjuk ki. Egy él Δs elemi szakaszában folyó áram által keltett mágneses indukció a P pontban a 3. ábra jelöléseivel:

$$\left|\Delta\mathbf{B}(P)\right| = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{I\cdot\Delta s}{r^2}\sin\varphi,$$

ahol φ az elemi szakasz és az $\mathbf{r}$ vektor által bezárt szög. $\mathbf{B}$ irányát a jobbkéz-szabállyal határozhatjuk meg.

1984-11-424-2.eps

3. ábra

A teljes él járulékát a mágneses térhez úgy számíthatjuk ki, hogy vektoriálisan összegezzük az elemi szakaszokban folyó áram által létrehozott mágneses indukciókat. Könnyen látható, hogy a kocka középpontjában az egy él által létrehozott mágneses indukció nagysága az élben folyó árammal arányos. Az arányossági tényező az élek látószögétől és a P ponttól való távolságtól függ, tehát valamennyi élre ugyanakkora.

A jobb áttekinthetőség kedvéért a $\mathbf{B}_1\dots\mathbf{B}_{12}$ indukcióvektorokat párosával ábrázoltuk a 4. ábrán. $I_4=I_7$ és azonos irányúak, ezért $\mathbf{B}_4+\mathbf{B}_7=\mathbf{0}$. I_1 és I_{12} áramok tere ellentétes irányú, így $|\mathbf{B}_1+\mathbf{B}_{12}|=(12/7)\cdot|\mathbf{B}_0|$, ahol $|\mathbf{B}_0|$ az $1\,\mathrm{A}$ árammal átjárt él által létrehozott mágneses indukció nagysága a P pontban.

1984-11-424-3.eps

4.a ábra

1984-11-424-4.eps

4.b ábra

1984-11-424-5.eps

4.c ábra

A 4. b) ábrán az I_2 és I_9, illetve az I_3 és I_8 áramok által keltett tereket ábrázoltuk. A négy indukcióvektor eredőjét az alábbiak alapján számolhatjuk ki:

$\mathbf{B}_2$ párhuzamos $\mathbf{B}_9$-cel és $\mathbf{B}_3$ párhuzamos $\mathbf{B}_8$-cal, mivel a megfelelő élek párhuzamosak. Másrészt az ábrából látható, hogy $(\mathbf{B}_2+\mathbf{B}_9)$ merőleges $(\mathbf{B}_3+\mathbf{B}_8)$-ra, így $\mathbf{B}'=\mathbf{B}_2+\mathbf{B}_9+\mathbf{B}_3+\mathbf{B}_8$ nagysága

$$|\mathbf{B}'|=\sqrt{\left(|\mathbf{B}_2|+|\mathbf{B}_9|\right)^2+\left(|\mathbf{B}_3|+|\mathbf{B}_8|\right)^2}=\frac{6\sqrt{2}}{7}|\mathbf{B}_0|,$$

$\mathbf{B}'$ az xy síkkal párhuzamos irányú.

Hasonlóan látható, hogy $\mathbf{B}''=\mathbf{B}_5+\mathbf{B}_{11}+\mathbf{B}_6+\mathbf{B}_{10}$ nagysága

$$|\mathbf{B}''|==\sqrt{\left(|\mathbf{B}_5|+|\mathbf{B}_{11}|\right)^2+\left(|\mathbf{B}_6|+|\mathbf{B}_{10}|\right)^2}=\frac{6\sqrt{2}}{7}|\mathbf{B}_0|,$$

iránya pedig az yz síkkal párhuzamos.

$\mathbf{B}'$ merőleges $\mathbf{B}''$-re és $\mathbf{B}'+\mathbf{B}''$ iránya éppen $\mathbf{B}_1+\mathbf{B}_{12}$ irányával ellentétes. Másrészt $|\mathbf{B}'+\mathbf{B}''|=\sqrt{2}|\mathbf{B}'|=(12/7|\mathbf{B}_0|$, ami éppen $|\mathbf{B}_1+\mathbf{B}_{12}|$- vel egyezik meg. Tehát $\mathbf{B}_1+\mathbf{B}_{12}+\mathbf{B}'+\mathbf{B}''=0$.

A teljes áramrendszer által létrehozott eredő mágneses indukció a kocka közepén zérus.

II. megoldás. Bebizonyítjuk, hogy a mágneses indukció értéke a kocka közepén zérus.

Bármely élben folyó áram indukcióvektora az élre merőleges, P ponton átmenő síkban fekszik, így nincs az éllel párhuzamos komponense (P a kocka középpontját jelöli). Mivel minden él ugyanakkora látószögben látszik a P-ből, a mágneses indukció arányos az élben folyó árammal és az arányossági tényező ugyanaz minden áramra. Egy indukcióvektornak a megfelelő tengelyekre vett komponensei a P pont kitüntetett helyzete miatt abszolút értékben azonos nagyságúak. Például az 1. ábrán feltüntetett koordináta-rendszerben az I_8 által létrehozott $\mathbf{B}_8$ indukcióvektorra igaz a

$$|(\mathbf{B}_8)_x|=(\mathbf{B}_8)_y|=kI_8$$

egyenlőség, ahol k minden élre ugyanaz az állandó.

Vizsgáljuk először az eredő mágneses indukció z komponensét! Ekkor a fentiek alapján elegendő az x és y iránnyal párhuzamos élekben folyó áramok terét tekinteni. Így csak az $ABFE$ és $DCGH$ négyzet éleiben folyó áramok adnak járulékot a $\mathbf{B}_2$ komponenshez a P pontban. Az $ABFE$ hurokban folyó áramok terének z komponense: $k(I_1-I_6-I_7-I_5)$. Ennek irányát legkönnyebben a jobbkéz-szabállyal állapíthatjuk meg. Szorozzuk meg ezt a mennyiséget az élek R ellenállásával. Ekkor az előbbi kifejezés zárójelében az $(I_1R-I_6R-I_7R-I_5R)$ kifejezést, a hurokban levő ellenállásokon eső feszültségek algebrai összegét kapjuk. Kirchhoff huroktörvénye alapján ez a kifejezés zérus. Hasonló gondolatmenettel kapjuk, hogy a $DCGH$ hurokban folyó áramok terének z komponense is zérus a P pontban.

Ezzel beláttuk, hogy az összes áram eredő mágneses indukciójának z irányú komponense a kocka középpontjában zérus.

Az előbbi indokláshoz hasonlóan kapjuk, hogy az eredő mágneses indukció x, ill. y irányú komponense a kocka középpontjában zérus. Így az eredő mágneses tér a kocka középpontjában zérus.

A bizonyításhoz csak azt használtuk fel, hogy a P pontból azonos látószögben látjuk az összes élt és minden él azonos ellenállású. Az előbbi két feltétel akkor is teljesül, ha a kocka bármely másik két csúcsára kötjük az áramforrást, így a mágneses tér minden esetben zérus a kocka közepén.