A q töltésre az ábrákon látható három erő hat: a K nagyságú kötélerő, a töltések közti F nagyságú Coulomb-erő és az mg nagyságú súlyerő.

1984-04-184-1.eps

1. ábra

Az 1. ábrán az $\alpha \le 90^\circ$, a 2. ábrán a $90^\circ < \alpha \le 180^\circ$ eset látható. A kitűzés ábrája azt sugallja, hogy α legfeljebb 90° lehet (ezt a megoldások értékelésénél figyelembe is vettük), mi azonban foglalkozzunk az általános esettel! A töltések d távolsága az ABO egyenlő szárú háromszögből $d = 2l\sin(\alpha/2)$. Így az F Coulomb-erő:

$$F = k\frac{Qq}{4l^2\sin^2(\alpha/2)}. \tag{1}$$

Írjuk fel az egyensúly feltételét úgy, hogy az erőket az OB egyenessel párhuzamos, illetve rá merőleges irányú összetevőkre bontjuk:

$$K = mg\cos\alpha + F\sin(\alpha/2). \tag{2}$$

$$F\cos(\alpha/2) = mg\sin\alpha. \tag{3}$$

(Az egyenletek $0 < \alpha \le 180^\circ$ esetén érvényesek.) (1) és (3) alapján kapjuk, hogy egyensúly csak olyan α szög esetében lehetséges, amelyre

$$\left[k\frac{Qq}{4l^2\sin^2(\alpha/2)} - mg2\sin(\alpha/2)\right]\cos(\alpha/2) = 0;$$

azaz vagy

a) $\cos(\alpha/2) = 0$, $\alpha/2 = 90^\circ$, $\alpha = 180^\circ$, (4)

vagy

b) $\sin(\alpha/2) = \sqrt[3]{\dfrac{kQq}{8mgl^2}}$. (5)

A (2) egyenlet alapján az *a)* eset megvalósulásához szükséges, hogy

$$F - mg \ge 0,$$

azaz

$$K = k\frac{Qq}{4l^2} - mg \ge 0 \tag{6}$$

legyen, hiszen K a kötélerő abszolút értékét jelöli.

1984-04-184-2.eps

2. ábra

A *b)* eset megvalósulásához egyrészt (5) alapján szükséges feltétel:

$$\frac{kQq}{8mgl^2} \le 1. \tag{7}$$

Másrészt (2) miatt szükséges feltétel:

$$mg\cos\alpha + F\sin(\alpha/2) \ge 0,$$

azaz

$$K = mg\cos\alpha + \frac{kQq}{4l^2\sin(\alpha/2)} \ge 0.$$

Ez a feltétel (5) alapján [ha (7) teljesül] így írható:

$$K = mg[\cos\alpha + 2\sin^2(\alpha/2)] \ge 0,$$

$\cos\alpha = 1 - 2\sin^2(\alpha/2)$ miatt

$$K = mg, \tag{8}$$

és így az egyenlőtlenség mindig teljesül.

Tekintve, hogy a (2), (3) egyenletek az egyensúly *szükséges* és *elégséges* feltételét adják meg, azért összefoglalva a következőket állapíthatjuk meg:

$$\frac{kQq}{8mgl^2} \geq 1 \tag{9}$$

esetén csak $\alpha = 180^\circ$ mellett van egyensúly (l. a (6), (7) egyenlőtlenségeket!). Ekkor a kötélerő a (6) képletből számolható.

$$\frac{1}{2} \leq \frac{kQq}{8mgl^2} < 1 \tag{10}$$

esetén egyensúly van $\alpha = 180^\circ$ mellett és az (5) feltételből adódó α szög mellett is, és K (6), illetve (8) alapján számolható.
Végül

$$\frac{kQq}{8mgl^2} < \frac{1}{2} \tag{11}$$

esetén az (5) feltételnek eleget tevő α szög mellett van egyensúly, ekkor K értékét (8) adja.

Belátható, hogy a (10) feltétel teljesülése esetén az $\alpha = 180^\circ$ labilis egyensúlyi helyzetet jelent, az (5) feltételből adódó α szög pedig stabil egyensúlyi helyzetet jelent. A feladat számadataival csak az $\alpha \approx 60^\circ$ szög adódik az egyensúlyi helyzetre [ekkor (11) teljesül] és $K = mg = 9,81 \cdot 10^{-3}$ N.