Függőleges síkú körmozgás akkor jöhet létre, ha a kötél végig feszes marad a mozgás során. Az F kötélerő a pálya tetőpontján lesz a legkisebb, ezért itt írjuk fel a körmozgás dinamikai feltételét:

$$F + mg = mv^2/R, \tag{1}$$

ahol m a test tömege, v a sebessége, amelyet a mechanikai energiamegmaradás törvényéből számíthatunk ki:

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2gR}. \tag{2}$$

1984-01-037-1.eps

Ahhoz, hogy $F > 0$ legyen, a v_0 kezdősebességnek $\sqrt{3} \cdot \sqrt{gR}$-nél nagyobbnak kell lennie, ami a feladatban teljesül is. Ezért a megadott kezdősebesség esetén a kötél végig feszes marad, létrejön a függőleges síkú körmozgás.

A függőleges síkú, nem egyenletes körmozgás periódusidejét nehéz pontosan kiszámítani, de viszonylag egyszerű a vízszintes síkú mozgás körülfordulási idejével összevetni. Válasszunk ki egy-egy Δs hosszúságú körívet a körpálya felső és alsó felében a kezdeti vízszintes kötélhelyzethez képest szimmetrikusan. Ha a körpálya vízszintes helyzetű, akkor a két körív befutásához szükséges idő: $2 \cdot \Delta s/v_0$, hiszen a körmozgás egyenletes. Függőleges pályasík esetén ez az idő $(\Delta s/v_1 + \Delta s/v_2)$ lesz, mert a sebességek már nem lesznek egyenlők. A közelítés annál jobb, minél kisebbre választjuk a köríveket. A v_1 és a v_2 sebességeket az energiamegmaradás tételéből számíthatjuk ki:

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 - 2gh}, \qquad v_2 = \sqrt{v_0^2 + 2gh}. \tag{3a–b}$$

Azt állítjuk, hogy függőleges helyzetben hosszabb idő szükséges a két körív befutására, mint vízszintes helyzetben, azaz

$$\frac{\Delta s}{v_1} + \frac{\Delta s}{v_2} > 2 \cdot \frac{\Delta s}{v_0}. \tag{4}$$

Helyettesítsük be v_1 és v_2 (3a–b) alatti kifejezéseit, és vezessük be az $x = 2gh/v_0^2$ (≥ 0) jelölést, ekkor (4) így írható:

$$\sqrt{1 + \frac{x}{1-x}} + \sqrt{1 - \frac{x}{1+x}} > 2. \tag{5}$$

Az egyenlőtlenség irányának megváltozása nélkül mindkét oldalt négyzetre emelhetjük $(0 \leq x \leq 0{,}5)$. Rendezés után az (5) egyenlőtlenséggel ekvivalens alábbi egyenlőtlenséget kapjuk:

$$\frac{2x^2}{1-x^2} + 2\sqrt{\left(1 + \frac{x}{1-x}\right)\left(1 - \frac{x}{1+x}\right)} > 0, \tag{6}$$

aminek helyességéről könnyen meggyőződhetünk, hiszen a bal oldalon mindkét tag nemnegatív szám.

A körülfordulási idő tehát nőtt a vízszintes síkú, egyenletes körmozgáshoz viszonyítva.