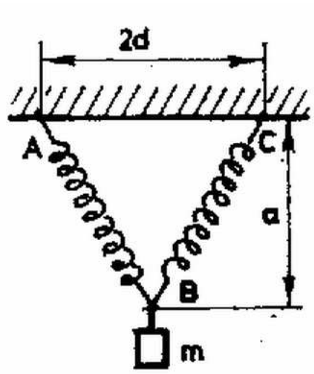

Egyensúly esetén egy-egy rugóban $F(\alpha)$ erő hat. Írjuk fel az egyensúly feltételét! A két rugóban fellépő erő vízszintes komponensének eredője zérus. A függőleges komponensek összege megegyezik az m tömegű test súlyával:

$$2F(a)\frac{a}{\sqrt{d^2+a^2}} = mg. \tag{1}$$

Innen $F(\alpha)$ értéke meghatározható.

Ha az m tömegű test az egyensúlyi helyzethez képest x távolsággal mozdul el függőleges irányban, akkor az egyik rugóban ébredő erő

$$F(\alpha+x) = F(\alpha) + D(\sqrt{d^2+(a+x)^2} - \sqrt{d^2+a^2}). \tag{2}$$

A testre ható eredő erő vízszintes komponense zérus és a függőleges komponense

$$F_y = mg - 2F_y(a+x), \tag{3}$$

ahol $F_y(a+x)$ az egyik rugóban fellépő erő függőleges komponense. Ha sikerülne F_y-t úgy felírni, hogy arányos legyen az $(a-x)$ kitéréssel, akkor az arányossági tényező megadná a rendszer D' direkciós erejét és ebből a rezgésidő meghatározható lenne:

$$F_y = D'x, \tag{4}$$

$$T = 2\pi\sqrt{m/D'}. \tag{5}$$

A rugóerő függőleges komponense

$$F_y(a+x) = F(a+x)\frac{a+x}{\sqrt{d^2+(a+x)^2}}.$$

Az (1), (2) egyenletek alapján

$$\begin{aligned} F_y(a+x) &= \left[\frac{mg\sqrt{d^2+a^2}}{2a} + D(\sqrt{d^2+(a+x)^2} - \sqrt{d^2+a^2}\right]\frac{a+x}{\sqrt{d^2+(a+x)^2}} = \\ &= \frac{mg}{2}\cdot\frac{x+a}{a}\cdot\frac{\sqrt{d^2+a^2}}{\sqrt{d^2+(a+x)^2}} + D(a+x) - D\frac{\sqrt{d^2+a^2}}{\sqrt{d^2+(a+x)^2}}(a+x). \end{aligned} \tag{6}$$

Ez a kifejezés sajnos nem arányos x-szel.

A feladat feltételei szerint $x \ll a$ Próbáljuk meg ekkor linearizálni az $F_y(a+x)$ kifejezést!

Először az alábbi közelítést végezzük el:

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{d^2+(a+x)^2}\right)^{-1} &= \left(\sqrt{d^2+a^2}\sqrt{1+\frac{2ax}{d^2+a^2}+\frac{x^2}{d^2+a^2}}\right)^{-1} \approx \\ \approx \left[\sqrt{d^2+a^2}\sqrt{1+\frac{2ax}{d^2+a^2}}\right]^{-1} &\approx \left[\sqrt{d^2+a^2}\left(1+\frac{ax}{d^2+a^2}\right)\right]^{-1} \approx \frac{1}{\sqrt{d^2+a^2}}\left(1+\frac{ax}{d^2+a^2}\right). \end{aligned} \tag{7}$$

A közelítések során először az $\dfrac{x^2}{d^2+a^2}$ tagot elhagytuk, mert 1 mellett másodrendűen kicsi. Ezután sorrendben a következő közelítő formulákat alkalmaztuk:

$$\sqrt{1+y} \approx 1 + y/2, \quad \text{ha} \quad y \ll 1 \quad \text{és} \quad (1+y)^{-1} \approx 1 - y, \quad \text{ha} \quad y \ll 1.$$

A (7) közelítő alakot (6)-ba írva:

$$F_y(a+x) \approx \frac{mg}{2} \cdot \frac{x+a}{a} \left(1 - \frac{ax}{d^2+a^2}\right) + D(a+x) - D\left(1 - \frac{ax}{d^2+a^2}\right)(a+x).$$

Elvégezve a kijelölt műveleteket és az x^2-t tartalmazó tagokat elhagyva, a következő kifejezést kapjuk:

$$F_y(a+x) = \frac{mg}{2} + \left[\frac{mg}{2}\left(\frac{1}{a} - \frac{a}{d^2+a^2}\right) + D\frac{a^2}{d^2+a^2}\right] x.$$

Ezt (3)-ba írva:

$$F_y = -\left[mg\left(\frac{1}{a} - \frac{a}{d^2+a^2}\right) + 2D\frac{a^2}{d^2+a^2}\right] x.$$

Látható, hogy itt F_y lineáris x-ben és együtthatója a D' direkciós erő:

$$D' = \frac{mg}{a} \cdot \frac{d^2}{d^2+a^2} + 2D\frac{a^2}{d^2+a^2}.$$

Végül a rezgésidő (5) alapján:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m(d^2+a^2)a}{2a^3D + d^2mg}}.$$

Horváth Ákos (Bp., Fazekas M. Gyak. Gimn., III. o. t.)

Megjegyzés. Több megoldó nem vette figyelembe az $F(a)$ rugóerőt, ami egyensúlyi helyzetben lép fel a rugókban.