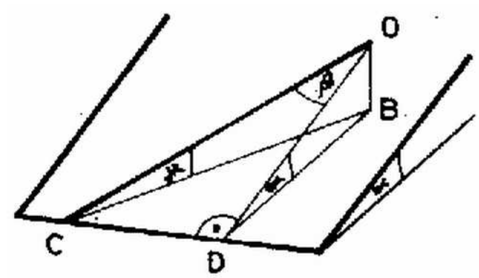
Először vizsgáljuk az $l = 0$ esetet! Tegyük fel, hogy a vízrészecskék v kezdősebességgel hagyják el a tömlőt! A belocsolható maximális területet a ferde hajítás törvényei szabják meg. Különböző szög alatt locsolva, a belocsolható terület alakját a legmesszebb repülő vízrészecskék határozzák meg. Ennek kiszámolásához vegyünk fel egy koordinátarendszert a lejtőn (1. ábra)!



1. ábra

Legyen O a locsolás helye, OD a lejtő esésvonala, ami α szöget zár be a vízszintessel! Messük el a lejtőt az O ponton átmenő valamely függőleges síkkal Ennek a lejtő síkjával alkotott metszésvonala legyen OC! Ez az OD egyenessel zárjon be β szöget!

Vizsgáljuk az O, C, B pontokon átmenő síkban történő ferde hajítást! Számoljuk ki először ebben a síkban a „lejtő szögét”, vagyis γ-t!

$$\frac{OB}{OD} = \sin\alpha, \quad \frac{OD}{OC} = \cos\beta, \quad \frac{OB}{OC} = \sin\gamma.$$

E három egyenletből

(1) $$\sin\gamma = \sin\alpha\, \cos v\beta.$$

Ezek után számoljuk ki azt, hogy egy γ szögű lejtőn milyen messzire lehet elhajítani egy testet v kezdősebességgel! A 2. ábra jelöléseivel írjuk fel a ferdehajítás mozgásegyenleteit!

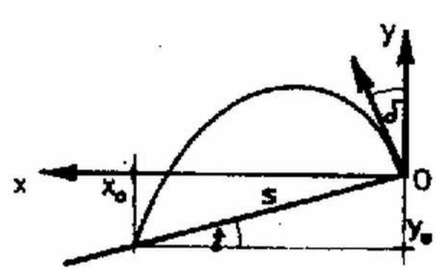
(2) $$x = (v \sin\delta) \cdot t,$$

(3) $$y = (v \cos\delta) \cdot t - (g/2)t^2$$

A lejtő egyenlete

(4) $$y = -(\mathrm{tg}\,\gamma)x.$$

(δ jelöli a hajítás függőlegessel bezárt szögét.)



2. ábra

A hajítás távolsága.

(5) $$s = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

A (2), (3) és (4) egyenletek segítségével, trigonometrikus átalakítások után s-re a következő kifejezést kapjuk:

$$s = \frac{v^2}{g\, \cos^2\gamma} |\sin(2\delta - \gamma) + \sin\gamma|.$$

s akkor maximális, ha $(2\delta - \gamma) = \pi/2$ vagy $(2\delta - \gamma) = -\pi/2$, attól függően, hogy $\sin\gamma$ pozitív vagy negatív. Az egyik a felfelé, a másik a lefelé hajítás legtávolabbi pontját adja a γ hajlásszögű lejtőn.

$$s_{\max}(\text{lefelé}) = \frac{v^2}{g\cos^2\gamma}(1+\sin\gamma),$$
$$s_{\max}(\text{felfelé}) = \frac{v^2}{g\cos^2\gamma}(1-\sin\gamma).$$

(1) segítségével
$$s_{\max} = \frac{v^2}{g}\cdot\frac{1}{1\pm\sin\alpha\cos\beta}.$$
Ha $0 \leqq \beta < 2\pi$, akkor elég a negatív előjelű tagot megtartani. Tehát

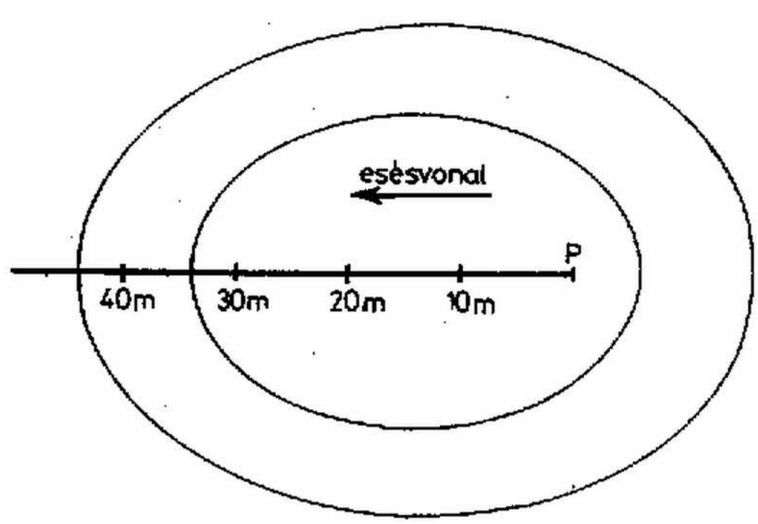
$$s_{\max} = \frac{v^2}{g}\cdot\frac{1}{1-\sin\alpha\cos\beta.} \tag{6}$$

Ez pedig egy ellipszis paraméteres egyenlete. (L. pl. Bronstejn-Szemengyajev: Matematikai zsebkönyv!)

Vizsgáljuk ezután az $l \neq 0$ esetet!

Az előző pont érvelései alkalmazhatók annak figyelembevételével, hogy a cső vége az O ponttól l távolságra kerül, hiszen a feladat megfogalmazása szerint a cső végét nem emeljük fel a földről.

Ez annyiban módosítja a levezetést, hogy (6) helyett
$$S_{\max} = \frac{v^2}{g}\cdot\frac{1}{1-\sin\alpha\cos\beta}+l.$$
Ez a síkbeli polárkoordinátákban megadott egyenlet már nem ellipszis egyenlete, hanem egy negyedfokú görbéé.



3. ábra

Ha a $v = 10$ m/s, $\alpha = 45°$, numerikus értékekkel számolunk, $l = 0$ és $l = 10$ m esetén a belocsolható maximális területet a 3. ábra szemlélteti. A locsolócső a P pontban van rögzítve.

Szolnoki Attila (Nyíregyháza, Krúdy Gy. Gimn., II. o. t.)