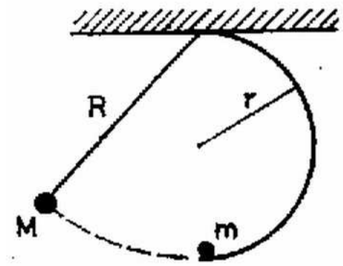


Térítsük ki az M tömegű testet alaphelyzetéből φ szöggel, és számítsuk ki a (tökéletesen rugalmas) ütközés utáni sebességeket!

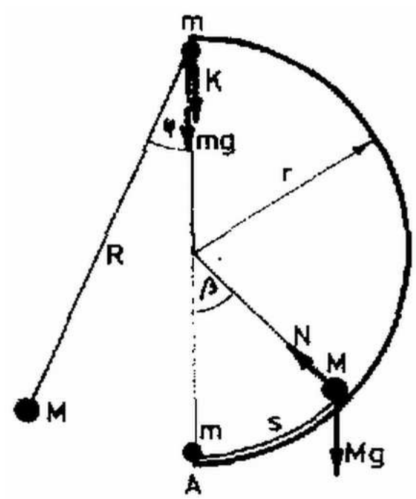
A mechanikai energiamegmaradás tétele alapján az M tömegű test olyan V sebességgel érkezik az A pontba (1. az ábrát), amelyre nézve

(1) $$MgR(1-\cos\varphi) = (1/2)MV^2.$$

Ütközés közben a két test között csak belső erők hatnak, így az impulzusmegmaradás tétele szerint

(2) $$MV = MU + mu$$

ahol U, ill. u az M, ill. m tömegű testek ütközés utáni sebessége.



Rugalmas ütközés esetén az energiamegmaradás tétele alapján

(3) $$(1/2)MV^2 = (1/2)MU^2 + (1/2)mu^2.$$

Az (1)-(3) egyenletekből

(4) $$U = \frac{M-m}{M+m}\,V = \frac{M-m}{M+m}\sqrt{2gR(1-\cos\varphi)},$$

(5) $$u = \frac{2M}{M+m}\,V = \frac{2M}{M+m}\sqrt{2gR(1-\cos\varphi)},$$

Vizsgáljuk meg ezek után, mi a feltétele annak; hogy az m tömegű test befussa a félkörívet!

Pályájának tetőpontján a w sebességgel rendelkező m tömegű testre az mg nehézségi erő és a pálya K kényszerereje hat:

(6) $$K + mg = mw^2/r.$$

Határesetben $K=0$, vagyis (6)-ból

(7) $$w = \sqrt{gr}.$$

Legalább ekkora sebességű kell, hogy legyen az m tömegű test a pálya tetőpontján.

Az m tömegű testnek akkora u sebességgel kell indulnia az A pontból, hogy

$$(1/2)mu^2 \geqq (1/2)mw^2 + 2mgr \tag{8}$$

legyen. Behelyettesítve a (8) egyenlőtlenségbe u és w (5), ill. (7) kifejezéseit, majd rendezve kapjuk, hogy

$$0 \leqq \cos\varphi \leqq 1 - \frac{5}{8}\frac{r}{R}\left(1+\frac{m}{M}\right)^2, \tag{9}$$

ahol a bal oldali egyenlőtlenség $0° \leqq \varphi \leqq 90°$ miatt teljesül.

Adatainkkal a minimális kitérítés szögére (9)-ből$(90° \geqq)\varphi \geqq 72{,}7°$ adódik.

A minimális tömegarányt ugyancsak (9)-ből kapjuk $\varphi = 90°$ (a legkedvezőbb eset) helyettesítéssel:

$$\frac{M}{m} \geqq \frac{1}{\sqrt{\frac{8}{5}\frac{R}{r}} - 1}. \tag{10}$$

Adatainkkal: $M/m \geqq 1{,}27$. A (10) egyenlőtlenségbőI leolvashatjuk még, hogy $R/r \leqq 5/8$ esetén M és m nem választható meg úgy, hogy az m tömegű test befussa a, félkörívet.

Végezetül számítsuk ki, hogy az ingatest legkisebb szükséges kitérítése ($\varphi = 72{,}7°$) esetén mekkora utat fut be az M tömegű test! Az ingatest ütközés utáni helyzetét a köríven jellemezzük a β szöggel, sebessége legyen W! Ekkor a sugárírányú erőkre

$$N - Mg\cos\beta = MW^2/r, \tag{11}$$

ahol N jelöli a pálya kényszererejét. A test a körpályán addig emelkedik, amíg az alábbi feltételek egyike be nem következik:

a) $N = 0$ $\quad(\beta \geqq 90°)$ vagy
b) $W = 0$ $\quad(\beta \leqq 90°)$.

A test W sebességét a mechanikai energiamegmaradás tételéből számolhatjuk:

$$(1/2)MU^2 = (1/2)MW^2 + Mgr(1-\cos\beta). \tag{12}$$

A fenti egyenletbe $W = 0$ értéket helyettesítve, valamint felhasználva (4)-et, adatainkkal ($\varphi = 72{,}7°$) kapjuk, hogy a $W = 0$ feltétel $\beta_{\max} = 32{,}5°$ esetén teljesül, vagyis a *b*) eset valósul meg. Így az M tömegű test által befutott ívhossz

$$s = r\beta\pi/180° = 0{,}5\ \mathrm{m}\cdot 32{,}5°\cdot\pi/180° = 0{,}28\ \mathrm{m}.$$

Babarczy Emese (Kalocsa, I. István Gimn., III. o. t.)