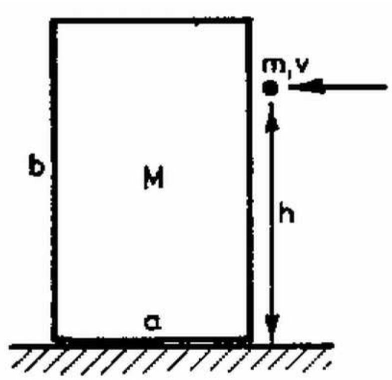
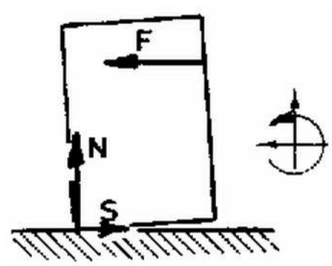


Ha a golyó t idő alatt fékeződik le teljesen, akkor a ládára átlagosan $F = mv/t$ nagyságú erővel hat, ahol mv a golyó mozgásmennyisége. A nagyon kis t esetét vizsgáljuk, vagyis azt, amikor F olyan nagy, hogy a becsapódás ideje alatt a súlyerőt elhanyagolhatjuk.

A becsapódó golyó a ládát megbillentheti. A következő esetek lehetségesek:

A) A láda balra billen, a bal alsó éle nem csúszik meg (1. ábra).
B) A láda balra billen, és a bal alsó éle jobbra csúszik (2. ábra).
C) A láda balra billen, és a bal alsó éle balra csúszik (3. ábra).
D) A láda jobbra billen, és a jobb alsó éle balra csúszik (4. ábra).

Jobbra billenve a láda jobbra nem csúszhat, és a láda éle helyben sem maradhat, mert ekkor a tömegközéppont is jobbra gyorsulna, ami ellenkezne a mozgásmennyiség megmaradásával. Annál az élnél, amely körül a láda billen, a ládára ható erőt felbontottuk a talajra merőleges N nyomóerőre, és az S súrlódási erőre. A feladat csak azt kérdezi, hogy mikor valósul meg az A eset, de a pontos válaszhoz a másik hármat is meg kell vizsgálni, vegyük tehát sorra őket! A golyó m tömegét el fogjuk hanyagolni a láda M tömege mellett.



1. ábra

A) (1. ábra) A láda tömegközéppontjának vízszintes és függőleges irányú gyorsulása akkor, ha az él nem csúszik meg: $a_x = \beta b/2$, $a_y = \beta a/2$, ahol β a láda szöggyorsulása; a pozitív irányokat az 1. ábrán jelöltük. A három ismeretlenhez – N, S, β – három mozgásegyenletet írhatunk fel:

$$M\beta a/2 = N,$$
$$M\beta b/2 = F - S,$$
$$\Theta\beta = Fh.$$

Θ a forgástengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomaték:

$\Theta = \Theta_0 + M\dfrac{a^2+b^2}{4} = M\dfrac{a^2+b^2}{3} = M\dfrac{c^2}{3}$; c a téglalap átlója.

A megoldás:

$$\beta = (F/M)(3h/c^2), \quad N = F(3/2)(ah/c^2), \quad S = F\big[1-(3/2)(hb/c^2)\big].$$

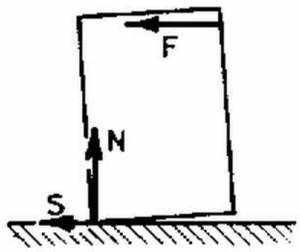
E mozgás megvalósulása esetén szükségképpen

$\beta > 0$ (a láda balra billen),

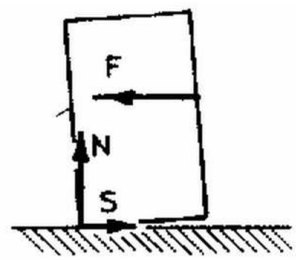
$|S| \le \mu N$ (a láda nem csúszik meg).

Az első feltétel mindig teljesül, a második pedig akkor, ha

$$\left|\frac{2}{3}\frac{c^2}{ha} - \frac{b}{a}\right| \le \mu.$$



2. ábra



3. ábra

(B, C) (2–3. ábra) Ezt a két esetet együtt tárgyaljuk, és ahol eltérés van, ott azt a $\genfrac{}{}{0pt}{}{B}{C}$ helyzetbe írt jelekkel különböztetjük meg. A vízszintes gyorsulásra most nincs kényszerfeltétel, ezért eggyel kevesebb mozgásegyenletünk van:

$$M\beta a/2 = N;$$

a forgás mozgásegyenlete a láda tömegközéppontjára nézve

$$M(c^2/12)\beta = F(h - b/2) - Na/2 - Sb/2;$$

a súrlódási erő csúszáskor:

$$S = \pm\mu N.$$

Az egyenletrendszer megoldása:

$$N = \frac{F\left(h - \dfrac{b}{2}\right)}{\dfrac{c^2}{6a} + \dfrac{a}{2} \pm \mu\dfrac{b}{2}}, \qquad \beta = \frac{2N}{Ma}, \qquad S = \pm\mu N.$$

Ebben az esetben a következő feltételeknek kell teljesülniük:

$\beta > 0$ (a láda balra billen),

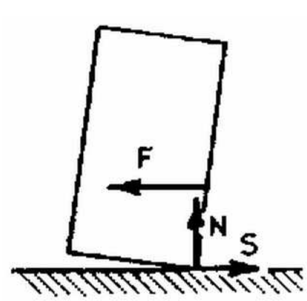
$\dfrac{F+S}{M} \lessgtr \beta\dfrac{b}{2}$ (a láda jobbra, illetve balra csúszik).

A megoldásokat behelyettesítve egy egyenlőtlenségrendszerhez jutunk, amelynek megoldása a B esetben:

$$h > \frac{b}{2} \quad \text{és} \quad \frac{b}{a} - \frac{2}{3}\frac{c^2}{ah} > \mu.$$

A C esetben teljesülniük kell az alábbi feltételeknek:

$$h > \frac{b}{2} \quad \text{és} \quad \mu < \frac{2}{3}\frac{c^2}{ah} - \frac{b}{a} \quad \text{vagy} \quad h < \frac{b}{2} \quad \text{és} \quad \frac{2}{3}\frac{c^2}{ah} - \frac{b}{a} < \mu.$$



4. ábra

D) (4. ábra). A mozgásegyenletek és a súrlódási erőre vonatkozó egyenlet:

$$-M\beta a/2 = N,$$
$$M(c^2/12)\beta = F(h - b/2) + Na/2 + Sb/2,$$
$$S = \mu N.$$

A megoldásuk:

$$N = -F\frac{h - \dfrac{b}{2}}{\dfrac{c^2}{6a} + \dfrac{a}{2} + \mu\dfrac{b}{2}}, \quad \beta = -\frac{2N}{Ma}, \quad S = \mu N.$$

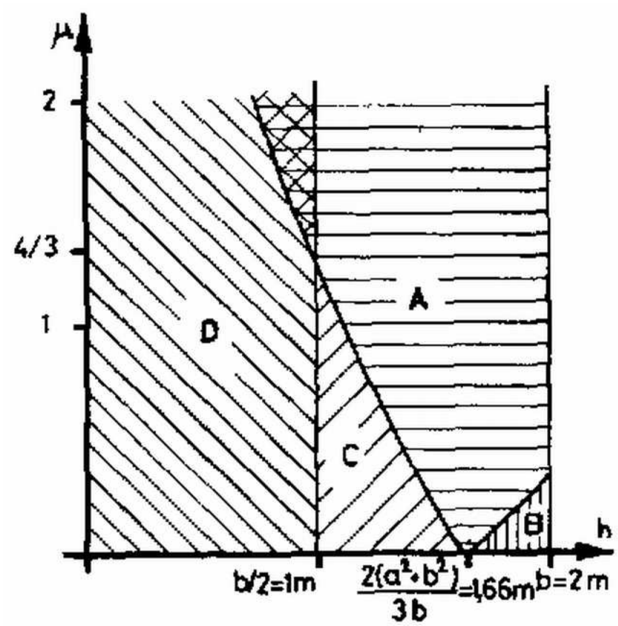
Ekkor az alábbi feltételeknek kell teljesülniük:

$\beta < 0$ (a láda jobbra billen),

$\dfrac{F - S}{M} > \beta\dfrac{b}{2}$ (a láda balra csúszik).

A megoldásokat behelyettesítve kapjuk, hogy akkor teljesül mindkét feltétel, ha $h < b/2$.

A különféle esetek megválaszolásához *szükséges* feltételeket az 5. ábrán tekintjük át.



5. ábra

Látható, hogy ha $\dfrac{2}{3}\dfrac{a^2 + b^2}{b} > b$, azaz $b < a\sqrt{2}$, akkor a B tartomány üres halmaz.

A $h < \dfrac{b}{2}$, $\dfrac{2}{3}\dfrac{c^2}{ah} - \dfrac{b}{a} < \mu$ feltételekkel leírt tartományban ábránk szerint az A, C és D eset egyaránt lehetséges. A valóságban az F erő egy kicsit előbb fogja gyorsítani és forgatni a ládát, mint az $N + S$ kényszererő, mert az utóbbihoz a test rugalmas deformációja is szükséges. A golyó becsapódásának kezdetén ezért jobbra forog a láda, a jobb alsó éle feszül a talajnak, ezért a D eset valósul meg a három lehetséges közül. Mivel az $A - D$ eseteken kívül más nem lehetséges, azért az ábrát ismét figyelembe véve láthatjuk, hogy az A eset akkor és csak akkor valósul meg, ha

$$h > \frac{b}{2} \quad \text{és} \quad \left|\frac{2c^2}{3ha} - \frac{b}{a}\right| \le \mu.$$

A megadott méretű ládára e feltételek:

$$h > 1\ \text{m} \quad \text{és} \quad |10\ \text{m}/3h - 2| \le \mu.$$

Vladár Károly