I. megoldás. Ha a Föld hirtelen abbahagyná a keringését a Nap körül, akkor a tömegvonzás miatt egyenes vonalú mozgással a Napba zuhanna. A pályáját egy olyan elfajult ellipszisnek tekinthetjük, amelynek nagytengelye a Föld–Nap távolság, kistengelye nulla, és egyik fókuszában a Nap áll. Kepler III. törvénye szerint a bolygók keringési idejének négyzete úgy aránylik egymáshoz, mint Naptól mért átlagos távolságuk köbei. Írjuk fel a Földre Kepler III. törvényét a keringés két állapotában, a két ellipszispálya megfelelő adataival:

$$\frac{T^2}{T_e^2}=\frac{R^3}{R_e^3},$$

ahol az e index az elfajult ellipszishez tartozó adatokat jelöli. Az elfajult ellipszis nagytengelye R, így itt az átlagos Föld–Nap távolság $R_e=R/2$. Ezt fel használva

$$T_e=\sqrt{\frac{T^2(R/2)^3}{R^2}}=T\,\sqrt{\frac{1}{8}}=\sqrt{\frac{1}{8}}\text{ év},$$

hiszen a Föld keringési ideje 1 év. A Föld az elfajult ellipszis pályán az ottani keringési ideje fele alatt érné el a Napot, azaz $(1/2)\sqrt{1/8}$ év $\approx 64,5$ nap alatt.

Lengyel György (Bp., Apáczai Csere J. Gyak. Gimn., II. o. t.)

II. megoldás. A Föld–Nap rendszer potenciális energiájának csökkenése révén a Föld kinetikus energiára tesz szert:

$$\gamma mM\left(\frac{1}{R-x}-\frac{1}{R}\right)=\frac{1}{2}mv^2(x),$$

ahol γ az általános tömegvonzás állandója ($\gamma=6,67\cdot10^{-11}$ m^3 kg^{-1} s^{-2}), M a Nap tömege ($M=2\cdot10^{30}$ kg), m a Föld tömege, $v(x)$ a Föld sebessége, miután már x távolságot megtett a Nap irányában.

Írjuk be $v(x)$ helyébe a dx/dt kifejezést, így a következő differenciálegyenletet kapjuk:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\sqrt{\frac{2\gamma M}{R}}\sqrt{\frac{x}{R-x}},$$

vagy másképpen:

$$\sqrt{\frac{R-x}{x}}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\sqrt{\frac{2\gamma M}{R}}.$$

Integráljuk mindkét oldalt 0-tól t-ig:

$$\int_0^t\sqrt{\frac{R-x}{x}}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t=\sqrt{\frac{2\gamma M}{R}}t.$$

A bal oldali integrál helyettesítéssel így számolható:

$$\int_0^t\sqrt{\frac{R-x}{x}}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t=\int_0^R\sqrt{\frac{R-x}{x}}\;\mathrm{d}x=\left[\sqrt{x(R-x)}-R\text{ arc tg }\sqrt{\frac{R-x}{x}}\right]_o^R=\frac{\pi}{2}R.$$

Eszerint

$$t=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{R^3}{2\gamma M}}.$$

Ezzel lényegében Kepler III. törvényének az első megoldásban felhasznált alakját kaptuk meg. Numerikusan $t=64,5$ nap, megegyezésben az előző megoldásnál kapott értékkel.

Marth Gábor (Bp., Apáczai Csere J. Gyak. Gimn., IV. o. t.)