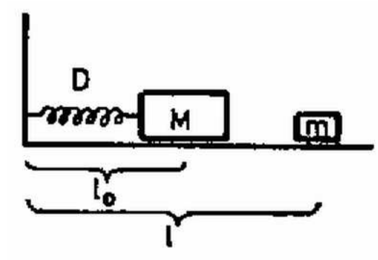


A feladat megoldásakor feltételezzük, hogy $x > l - l_0$, ellenkező esetben nem történik ütközés.

Az elengedett M tömegű test az ütközésig $\sqrt{D/m}$ körfrekvenciájú harmonikus rezgőmozgás egy szakaszát teszi meg. Ha a m tömegű test elhelyezkedési irányát vesszük pozitívnak, és az időt az elengedéstől számítjuk, a M tömegű test s kitérését a nyugalmi helyzetétől az idő függvényében a következő képlet adja meg:

(1) $$s = -x \ \cos(\sqrt{D/M} \cdot t).$$

A mechanikai energia megmaradásának tétele szerint

(2) $$(1/2)Dx^2 = (1/2)Ds^2 + (l/2)Mv^2,$$

ahol v a M tömegű test sebessége a szóban forgó s kitérésnél. A (2) összefüggésből kapjuk:

(3) $$v = \sqrt{(D/M)(x^2 - s^2)}.$$

A M tömegű test sebessége az ütközéskor

(4) $$v^* = \sqrt{(D/M)\left[z^2 - (l - l_0)^2\right]}.$$

Az ütközés t^* pillanatában (1) alapján

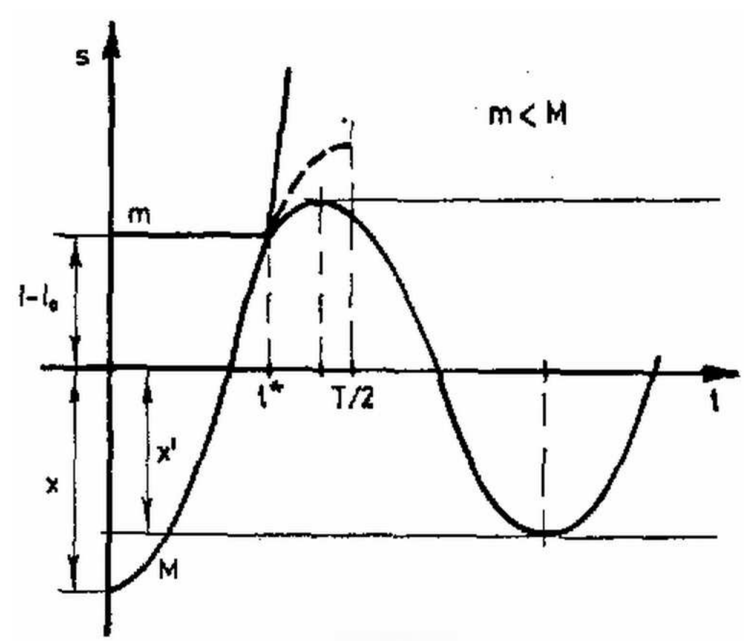
(5) $$-x \ \cos(\sqrt{D/M} \cdot t^*) = l - l_0.$$

Ebből

(6) $$t^* = \sqrt{\frac{M}{D}} \text{ arc } \cos\left(\frac{l_0 - l}{x}\right).$$

Tekintsük ezek után az ütközés különböző eseteit!

a) Legyen v' és u' a M és a m tömegű testek sebessége a rugalmas ütközés után.



1. ábra

Az impulzusmegmaradás törvénye szerint

(7) $$Mv^* = Mv' + mu'.$$

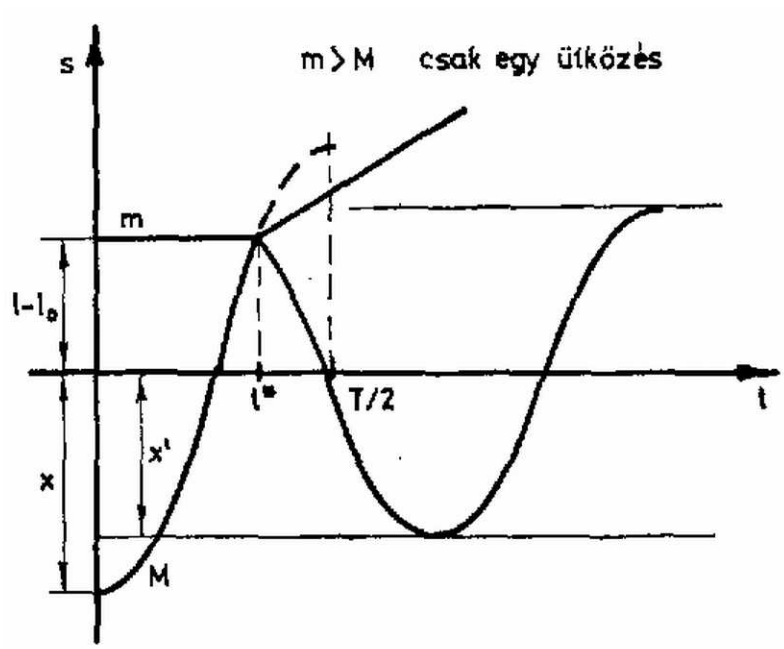
Rugalmas ütközés esetén teljesül a mechanikai energia megmaradásának törvénye:

(8) $$\frac{M(v^*)^2}{2} = \frac{M(v')^2}{2} + \frac{m(u')^2}{2}.$$

A (7), (8) egyenletekből kapjuk:

(9-10) $$v' = \frac{M-m}{M+m}v^*, \qquad u' = \frac{2M}{M+m}v^*.$$

Az ütközés után a m tömegű test u' sebességgel egyenesvonalú egyenletes mozgást, a M tömegű test pedig x' új amplitúdóval, $\sqrt{D/M}$ körfrekvenciával harmonikus rezgőmozgást végez.



2. ábra

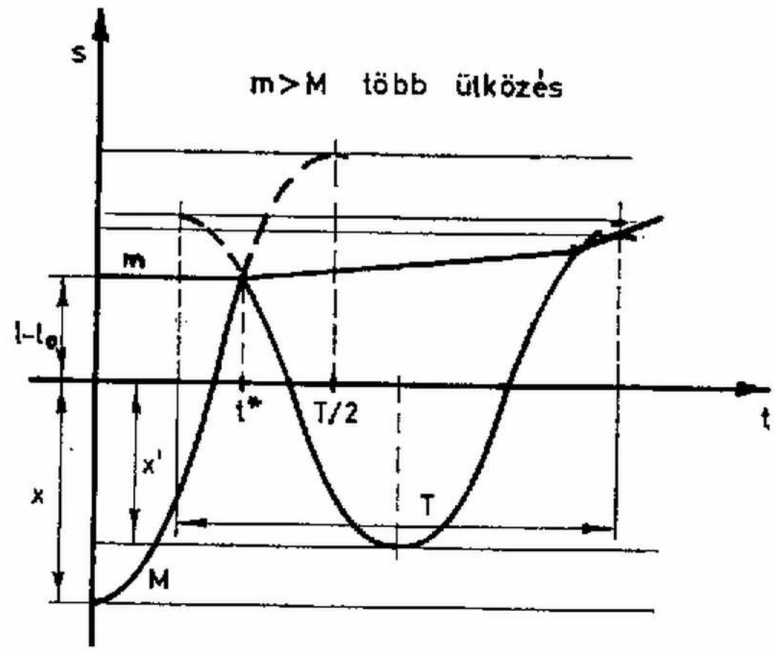
A mechanikai energiamegmaradás tétele szerint

(11) $$(1/2)D(x')^2 = (1/2)D(l-l_0)^2 + (1/2)M(v')^2.$$

A (4) és (9) összefüggéseket felhasználva, a (11) egyenletből kapjuk

(12) $$x' = \frac{M-m}{M+m}\sqrt{x^2 + \frac{4Mm}{(M-m)^2}(l-l_0)^2}.$$

Ha a m tömegű test ezen x' amplitúdón belül található még a M tömegű test mozgásának egy periódusáig, akkor újabb ütközés következik be. Ez csak $m > M$ esetén történhet meg, ellenkező esetben ugyanis v' és u' egyirányú és $v' < u'$, így a m tömegű test az x' amplitúdón kívülre kerül, még mielőtt a M tömegű test elérné mozgásának az ütközést követő szélső helyzetét.



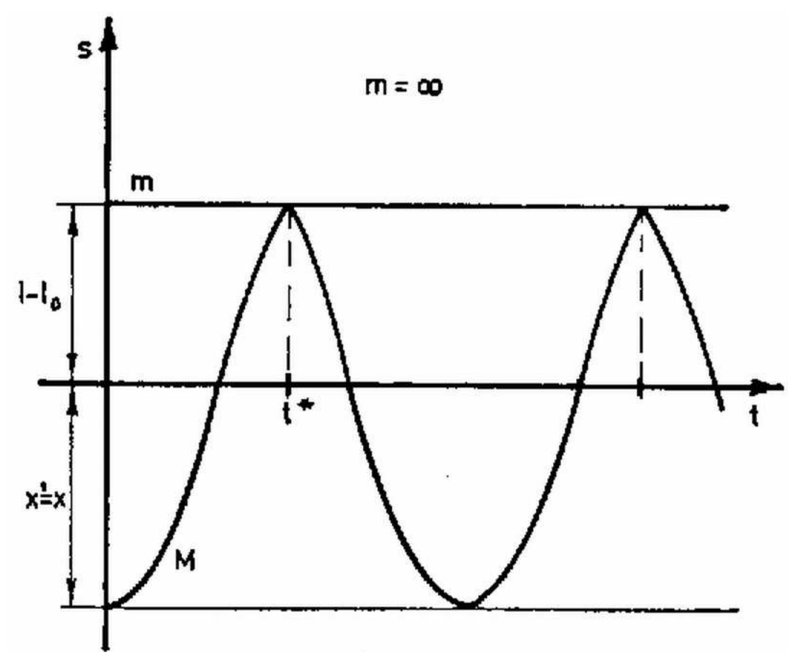
3. ábra

A 3. ábráról leolvasható, hogy a második ütközés akkor következik be, ha a

$$\Delta t = \sqrt{\frac{D}{M}}\left(2\pi - \text{arc } \cos\frac{l-l_0}{x'} - \text{arc } \cos\frac{l-l_0+u'\Delta t}{x'}\right) \tag{13}$$

transzcendens egyenletnek van Δt-re megoldása. M és m megfelelő aránya esetén tetszőleges számú ütközés lehetséges.

A $m=\infty$ határesetben a m tömegű test falként veri vissza a M tömegű testet, amellyel – periodikus mozgást végezve – újra és újra ütközik.



4. ábra

A mozgás fontosabb eseteit az 1., 2., 3., 4. ábrák mutatják.

b) Ebben az esetben a két tömeg az ütközés után közvetlenül egyforma v' sebességgel mozog, így az impulzusmegmaradás tétele az

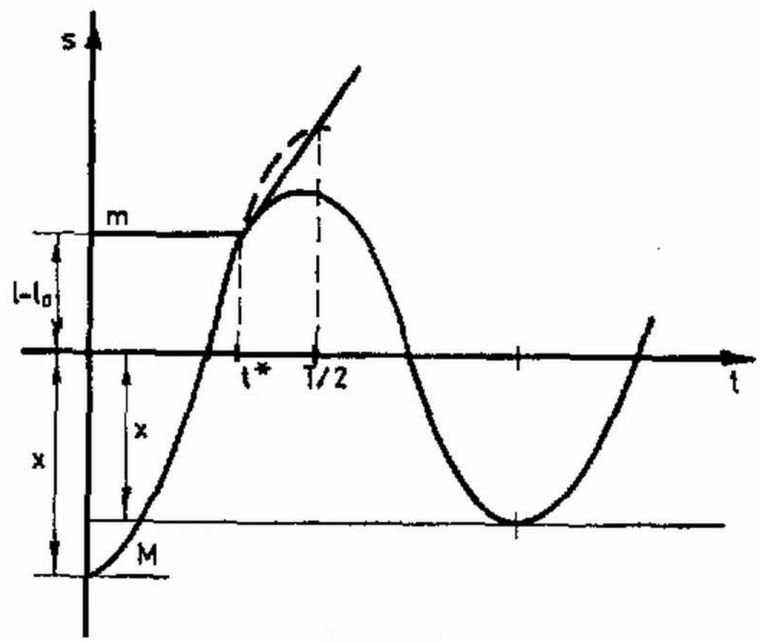
$$Mv^* = Mv' + mv' \tag{14}$$

alakot ölti. Ebből

$$v' = \frac{M}{M+m}\,v^*. \tag{15}$$

Az ütközés után a m tömegű test $v^{'}$ sebességű egyenesvonalú egyenletes mozgást végez, a M tömegű test pedig a rugó fékező hatására elválik tőle, és harmonikus rezgőmozgást végez.

Az 5. ábrából jól látható, hogy ekkor nem képzelhető el másodszori ütközés, hiszen a m tömegű test mozgását leíró egyenes érinti a M tömegű test szinuszos idő – elmozdulás diagramját.



5. ábra

A M tömegű test mozgásának új amplitúdóját a (11)-nek megfelelő egyenletből határozhatjuk meg:

$$x^{'} = \frac{M}{M+m} \cdot \sqrt{x^2 + \frac{2Mm+m^2}{M^2}(l-l_0)^2}. \tag{16}$$

c) Ha az ütközés után együtt marad a két test, akkor mozgásuk $\sqrt{\frac{D}{M+m}}$ körfrekvenciájú harmonikus rezgőmozgás lesz. Az $x^{'}$ új amplitúdót meghatározó egyenlet:

$$(1/2)D(x^{'})^2 = (1/2)D(l-l_0)^2 + (1/2)(M+m)(v^{'})^2. \tag{17}$$

Ebből

$$x^{'} = \sqrt{\frac{M}{M+m}\left[x^2 + \frac{m}{M}(l-l_0)^2\right]}. \tag{18}$$