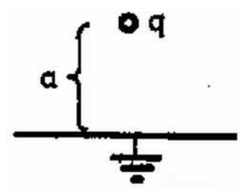
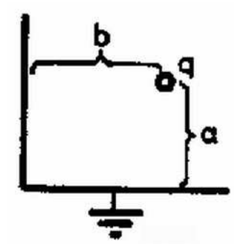
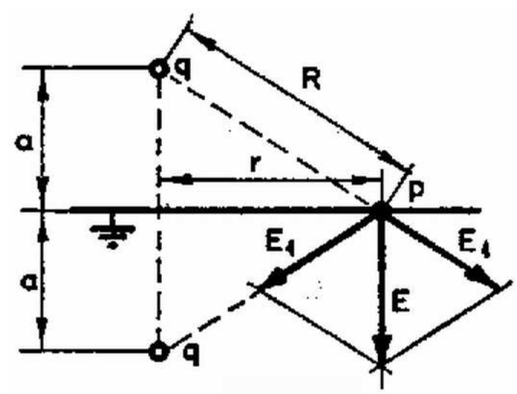


a)



b)

Először az a) ábra szerinti elrendezésnek megfelelő töltéseloszlást számítjuk ki. A töltéssűrűség csak attól függ, hogy milyen távolságra vagyunk a töltéstől, vagy a töltésből a síkra bocsátott merőleges talppontjától. Jelöljük ez utóbbi ponttól való távolságot a síkban r-rel (1. ábra).



1. ábra

Az 1748. feladat megoldásából tudjuk, hogy a térerősséget a fémlemez felületén úgy számíthatjuk ki, hogy tükrözzük a q töltés helyét a fémlemezre és a tükörpontba egy $-q$ töltést helyezünk. Az így kapott q és $-q$ töltés együttes tere a fémlemez felett megegyezik azzal a térrel, amelyet az eredeti q töltés és a hatására elektromos megosztással a fém felületén megjelenő töltések hoznak létre.

Ha kiszámítjuk a térerősséget a lemez felületéhez közel, illetve a lemez felületén, mint az r távolság függvényét, ebből már kiszámíthatjuk a töltéssűrűséget is mint az r függvényét. A q töltés által létrehozott térerősség a P pontban $E_1 = k\dfrac{q^2}{R^2}$ ahol k állandó, R pedig a P pont és a q töltés távolsága:$R = \sqrt{r^2 + a^2}$. A $-q$ töltés által létrehozott térerősség a P pontban szintén E_1 nagyságú, de iránya más,(l. az 1. ábrát). Az eredő térerősség a fémlemezre merőleges irányú, nagysága

$$E(r) = E_1\frac{2a}{R} = 2qk \cdot \frac{a}{(r^2 + a^2)^{3/2}}.$$

A térerősségből kiszámíthatjuk a felületegységre jutó töltésmennyiséget, azaz a töltéssűrűséget. Mivel Q töltésből $4\pi kQ$ erővonal indul ki, a töltéssűrűség

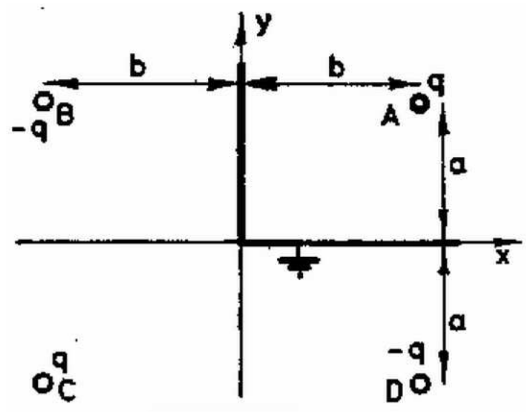
$$\sigma = \frac{E}{4\pi k}.$$

Így a P pontban a töltéssűrűség

$$\sigma(r) = \frac{E(r)}{4\pi k} = \frac{q}{2\pi}\frac{a}{(r^2 + a^2)^{3/2}},$$

ami éppen a keresett töltéseloszlást jellemző függvény.

A *b)* esetben a feladat nem hengerszimmetrikus. Itt – noha a megoldás hasonló – a fémlemez felületén mindkét félsíkon két koordinátát kell bevezetnünk.



2. ábra

A tükörtöltéseket a 2. ábrán rajzoltuk be: két $-q$ és egy $+q$ töltésű tükörtöltést kell felvennünk. Legyen koordinátarendszerünk olyan, hogy a z tengely essék egybe a két fémlemez metszésvonalával, az x tengely illeszkedjék az egyik fémlemezre, az y tengely pedig a másikra. Ekkor a négy töltés koordinátái a következők:

$$\begin{array}{rl} (q) & A=(b,\,a,\,0) \\ (-q) & B=(-b,\,a,\,0) \\ (q) & C=(-b,\,-a,\,0) \\ (-q) & D=(b,\,-a,\,0). \end{array}$$

A vizsgált P pont, amely az $(x,\,z)$ síkban van, legyen

$$P=(x,0,z).$$

A megfelelő távolságok:

$$R_{AP}=\sqrt{(b-x)^2+a^2+z^2},\qquad R_{BP}=\sqrt{(b+x)^2+a^2+z^2},$$
$$R_{CP}=\sqrt{(b+x)^2+a^2+z^2},\qquad R_{DP}=\sqrt{(b-x)^2+a^2+z^2}.$$

A négy ponttöltés által létrehozott térerősségnek az (x,z) síkra merőleges összetevője a P pontban

$$E_A=-k\frac{q}{R_{AP}^2}\cdot\frac{a}{R_{AP}};\qquad E_B=k\frac{q}{R_{BP}^2}\cdot\frac{a}{R_{BP}};$$
$$E_C=k\frac{q}{R_{CP}^2}\cdot\frac{a}{R_{CP}};\qquad E_D=-k\frac{q}{R_{DP}^2}\cdot\frac{a}{r_{DP}}.$$

Így a P pontban az eredő térerősség

$$E=E_A+E_B+E_C+E_D,$$

behelyettesítve

$$E(x,\,0,\,z)=2kga\cdot\left\{\left[\frac{1}{(b+x)^2+a^2+z^2}\right]^{3/2}-\left[\frac{1}{(b-x)^2+a^2+z^2}\right]^{3/2}\right\};$$

míg az (y, z) síkban hasonlóan kapjuk, hogy

$$E(0,y,z)=2kgb\left\{\left[\frac{1}{(a+y)^2+b^2+z^2}\right]^{3/2}-\left[\frac{1}{(a-y)^2+b^2+z^2}\right]^{3/2}\right\}.$$

A keresett tölteseloszlás pedig

$$\sigma(x,\,0,\,z)=\frac{qa}{2\pi}\left\{\left[\frac{1}{(b+x)^2+a^2+z^2}\right]^{3/2}-\left[\frac{1}{(b-x)^2+a^2+z^2}\right]^{3/2}\right\};$$
$$\sigma(0,\,y,\,z)=\frac{qb}{2\pi}\left\{\left[\frac{1}{(a+y)^2+b^2+z^2}\right]^{3/2}-\left[\frac{1}{(a-y)^2+b^2+z^2}\right]^{3/2}\right\}.$$

Oszlányi Gábor (Miskolc, Földes F. Gimn., IV. o. t.)
dolgozata alapján