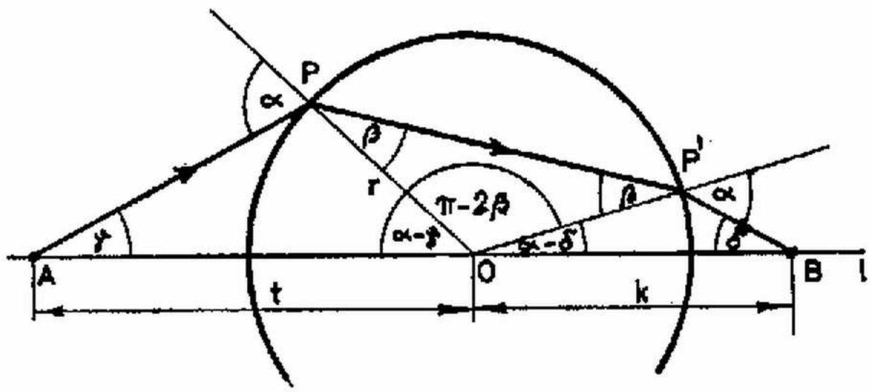
I. megoldás. Vizsgáljuk meg az n törésmutatójú, r sugarú gömb O középpontján átmenő e egyenesen (optikai tengelyen) elhelyezkedő A pontszerű fényforrásnak a gömb által előállított B képét (1. ábra).



1. ábra

Az A-ból kiinduló fénysugarak a gömbbe való belépéskor (a P pontban), ill. a gömb elhagyásakor (a P' pontban) törnek meg. A beesési, ill. törési szögeket (a gömb szimmetriájának felhasználásával) az ábrán tüntettük fel, és a Snellius–Descartes-törvény alapján írhatjuk:

$$\sin \alpha = n \sin \beta. \tag{1}$$

Az $\overline{OA} = t$ tárgytávolság és az $\overline{OB} = k$ képtávolság közötti összefüggést kell megkapnunk.

Írjuk fel ezért az AOP, ill. OBP' háromszögekre a sinustételt:

$$\frac{r}{t} = \frac{\sin \gamma}{\sin (\pi - \alpha)}, \tag{2}$$

$$\frac{r}{h} = \frac{\sin \delta}{\sin (\pi - \alpha)}, \tag{3}$$

és használjuk ki, hogy

$$AOB\sphericalangle = (\alpha - \gamma) + (\pi - 2\beta) + (\alpha - \delta) = \pi. \tag{4}$$

Az (1)–(4) egyenletekből a keresett leképzési törvényt könnyen megkaphatjuk, ha paraxiális sugarakra ($\gamma \approx 0$) szorítkozunk. Ekkor az α, β, δ szögek is kicsik, így jó közelítéssel szinuszaik helyett magukat a szögeket írhatjuk. Ennek felhasználásával a fenti egyenletrendszerből a szögek egyszerűen kiküszöbölhetők és az

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f}, \qquad f = \frac{n}{2(n-1)} \cdot r \tag{5}$$

leképezési törvényhez jutunk. Könnyen belátható, hogy ez az összefüggés az A pontban elhelyezett, a gömb átmérőjéhez képest kis kiterjedésű tárgy leképezését is helyesen (jó közelítéssel) írja le.

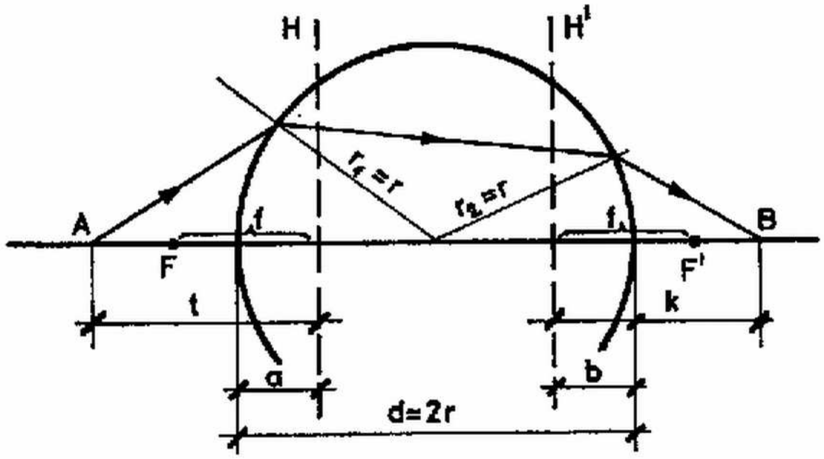
Megvizsgálva a kapott (5) egyenletet, láthatjuk, hogy az egy f fókusztávolságú vékony lencse leképezését írja le, hiszen mind a tárgy-, mind pedig a képtávolságot a lencse középpontjától mértük. Ez azt jelenti, hogy a gömbnek mint vastag lencsének a fősíkjai egybeesnek és a gömb középpontján haladnak át, vagyis első közelítésben a gömb egy vékony lencsével helyettesíthető, mégpedig $n > 1$ ($f > 0$) esetén gyűjtő, míg $n < 1$ ($f < 0$) esetén szóró lencsével.

Vegyük azonban észre, hogy pl. $1 < n < 2$ esetén $f < r$, vagyis elegendően távoli tárgy képe a *gömbön belül* keletkezik. Ez nyilván ernyőn fel nem fogható, ilyen értelemben tehát virtuális. Ebből látszik, hogy az analógia a gömb és egy megfelelő fókuszú vékony lencse leképezése között nem teljes.

A fentiekhez hasonlóan $0 < n < (2/3)$ (szórólencse) esetében $|f| < r$.

Csörgő Tamás (Gyöngyös, Berze Nagy J. Gimn., IV. o. t.)
dolgozata alapján

II. megoldás. A fenti eredményekhez egyszerűbben is eljuthatunk, ha a gömböt egy $r_1 = r_2 = r$ görbületi sugarú, $d = 2r$ vastagságú lencsének tekintjük.



2. ábra

Egy vastag lencse f fókusztávolságát, ill. fősíkjainak a, b helyzetét (2. ábra) az 1781. feladat megoldása alapján az

$$f=\frac{\dfrac{n}{n-1}\cdot r_1\cdot r_2}{n(r_1+r_2)-(n-1)d},$$
$$a=-\frac{dr_2}{n(r_1+r_2)-(n-1)d},$$
$$b=-\frac{dr_1}{n(r_1+r_2)-(n-1)d},$$

összefüggések adják meg. A fenti képletekbe helyettesítve a gömb adatait

$$f=\frac{n}{2(n-1)}\cdot r,\quad a=b=-r\quad \text{adódik.}$$

Oszlányi Gábor (Miskolc, Földes F. Gimn., IV. o. t.)