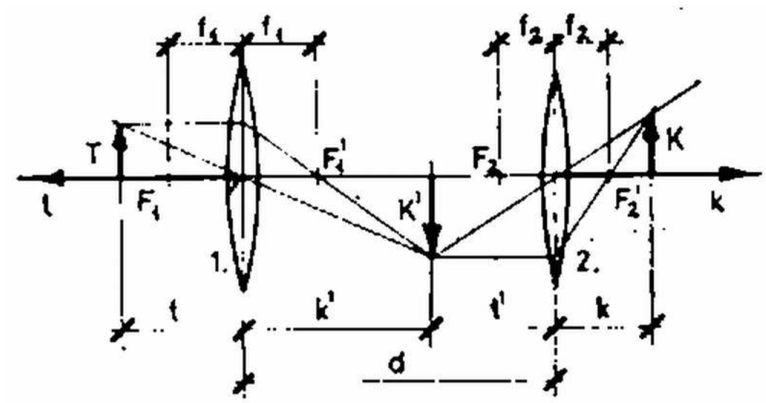
A T tárgyról az 1. lencse a K' képet alkotja, amit a 2. lencse mint (virtuális) tárgyat újra leképez, így a két lencséből álló optikai rendszer együttesen a K képet hozza létre.



1. ábra

Az 1. ábra jelöléseit alkalmazva a leképzési törvény szerint

(1a) $$(1/k') + (1/t) = (1/f_1),$$

(1b) $$(1/t') + (1/k) = (1/f_2),$$

valamint leolvasható, hogy

(1c) $$k' + t' = d.$$

Az (1a)–(1c) egyenletekből k'-t és t'-t kiküszöbölve a rendszer megoldását a

(2a) $$kt(f_1 + f_2 - d) - tf_2(f_1 - d) - kf_1(f_2 - d) = f_1 f_2 d$$

összefüggés írja le.

$d \neq f_1 + f_2$ esetén (2a)-t így is írhatjuk:

(2b) $$\left[k - \frac{f_2(d - f_1)}{d - f_1 - f_2}\right]\left[t - \frac{f_1(d - f_2)}{d - f_1 - f_2}\right] = \left[\frac{f_1 f_2}{d - f_1 - f_2}\right]^2.$$

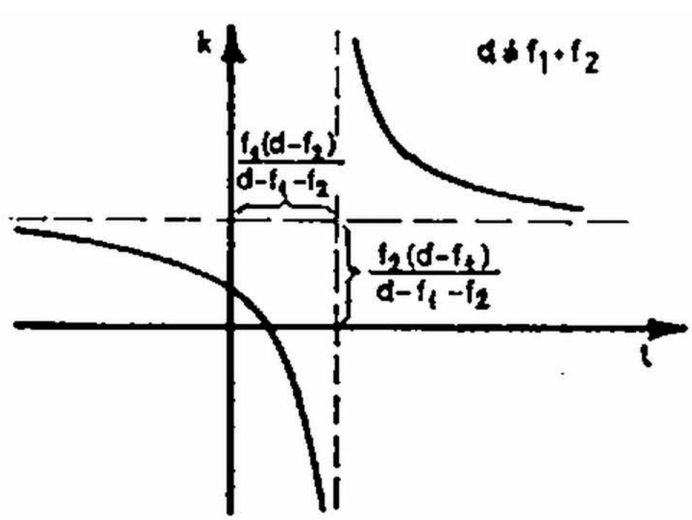
Végtelen távoli tárgy (az optikai tengellyel párhuzamos fénysugarak) esetén a kép (2b) szerint a

$$k = \frac{f_2(d - f_1)}{d - f_1 - f_2}$$

által jellemzett F_2 képoldali fókuszponton keletkezik. Hasonlóan kapjuk az F_1 tárgyoldali fókuszpont helyzetét jellemző

$$t = \frac{f_1(d - f_2)}{d - f_1 - f_2}$$

képletet.

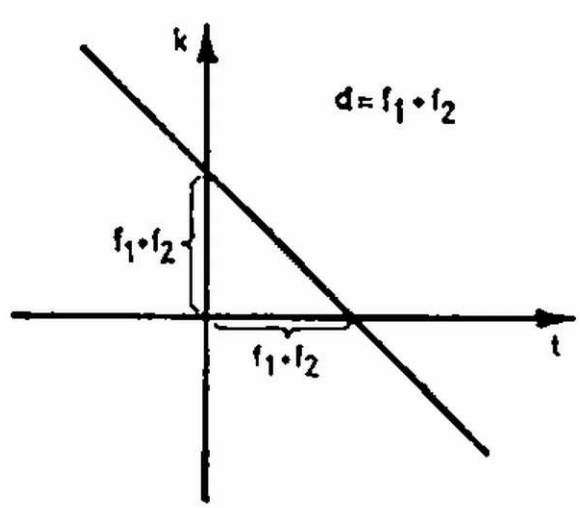


2. ábra

Az összetartozó tárgy- és képtávolságokat a (2b) összefüggés alapján a 2. ábra szemlélteti, míg $d = f_1 + f_2$ esetén (Kepler-távcső) (2a)-ból kapjuk:

$$\frac{t}{f_1 + f_2} + \frac{k}{f_1 + f_2} = 1.$$

Ezt az összefüggést a 3. ábrán ábrázoltuk.



3. ábra

Térjünk rá ezek után arra, hogyan alakíthatnánk át az összetartozó tárgy- és képtávolságokat leíró (2b) egyenletünket úgy, hogy a megszokott $(1/k) + (1/t) = (1/f)$, vagy az ezzel ekvivalens $(k - f)(t - f) = f^2$ (Newton-formula) alakú legyen.

Ez utóbbi egyenlet alakját (2b)-vel összehasonlítva vegyük észre, hogy kétlencsés rendszerünk eredő fókusztávolságát a

$$\varphi = -\frac{f_1 f_2}{d - f_1 - f_2}, \qquad \text{vagy} \qquad \varphi' = \frac{f_1 f_2}{d - f_1 - f_2}$$

összefüggések definiálják.

Tekintsük először a $\varphi = -\dfrac{f_1 f_2}{d - f_1 - f_2}$ $(d \neq f_1 + f_2)$ esetet, és vezessük be a

(3a) $$\tau = t - \frac{f_1 d}{d - f_1 - f_2}$$

(3b) $$\kappa = k - \frac{f_2 d}{d - f_1 - f_2}$$

jelöléseket, vagyis mérjük a tárgy- és képtávolságokat a

$$h_1\left(t = \frac{f_1 d}{d - f_1 - f_2}\right) \text{ ill. a } h_2\left(k = \frac{f_2 d}{d - f_1 - f_2}\right)$$

fősíkoktól. (Lásd az 1764. feladat megoldását!) Ebben az esetben (2b) a kívánt vagy

$$(\kappa - \varphi)(\tau - \varphi) = \varphi^2$$

vagy

(2c) $$(1/\kappa) + (1/\tau) = (1/\varphi)$$

alakban írható.

Foglalkozzunk ezek után a $\varphi' = \dfrac{f_1 f_2}{d - f_1 - f_2}$ esettel. Az előbbiekhez hasonlóan az új tárgy- és képtávolságok

(4a) $$\tau' = t - f_2 \frac{d - 2f_1}{d - f_1 - f_2},$$

(4b) $$\kappa' = k - f_1 \frac{d - 2f_2}{d - f_1 - f_2},$$

amelyek h_1' $t = f_2 \dfrac{d-2f_1}{d-f_1-f_2}$ ill. h_2' $k = f_1 \dfrac{d-2f_2}{d-f_1-f_2}$ fősíkoktól mérendők. Ezek segítségével (2b)-t a következő alakban írhatjuk:

$$(\kappa' - \varphi')(\tau' - \varphi') = (\varphi')^2$$

vagy

(2d) $$(1/\kappa') + (1/\tau') = (1/\varphi').$$

Tehát mind a (3a), (3b), mind pedig a (4a), (4b) transzformációk segítségével sikerült átírnunk (2b)-t a kívánt $(1/k) + (1/t) = (1/f)$ alakra.

Zavaró azonban, hogy a fentiek alapján a rendszer fősíkjainak helyzete nem egyértelmű; attól függően, hogy melyik transzformációt alkalmazzuk, helyzetük különbözik.

Arra gondolhatunk, hogy a (3a), (3b), ill. a (4a), (4b) egyenletek közül csak az egyik írja le helyesen a valóságos viszonyokat. Elvárjuk például, hogy $d = 0$ esetén egy $f = \dfrac{f_1 f_2}{f_1 + f_2}$ fókusztávolságú, vékony lencse jól ismert $(k-f)(t-f) = f^2$ ill. $\dfrac{1}{f} = \dfrac{1}{k} + \dfrac{1}{t}$ leképezési törvényét kapjuk vissza (itt most k és t az 1. ábrán jelölt távolságokat jelöli), amelynek – mint vékony lencsének – fősíkjai egybeesnek.

Valóban, ez a $\varphi = \dfrac{-f_1 f_2}{d - f_1 - f_2}$ és a (3a), (3b) egyenletek alapján adódó h_1, ill. h_2 fősíkok esetén láthatóan teljesül, míg a második transzformáció esetén nem.

Ezért azt mondhatjuk, hogy (legalábbis a $0 \leqq d < f_1 + f_2$ esetén) a rendszer viselkedését, ill. fősíkjainak helyzetét az

$$(1/\kappa) + (1/\tau) = (1/\varphi),$$

$$\varphi = -\frac{f_1 f_2}{d - f_1 - f_2},$$

$$\tau = t - \frac{f_1 d}{d - f_1 - f_2},$$

$$\kappa = k - \frac{f_2 d}{d - f_1 - f_2},$$

$$h_1'\left(t = \frac{f_1 d}{d - f_1 - f_2}\right), \qquad h_2\left(k = \frac{f_2 d}{d - f_1 - f_2}\right)$$

összefüggések adják vissza helyesen.

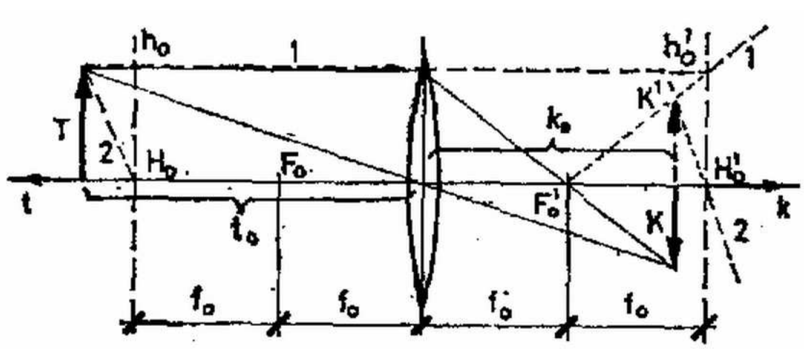
Bebizonyítható, (pl. képszerkesztéssel), hogy ez $d > f_1 + f_2$ esetén is igaz.

Mi az oka tehát a látszólagos kétértelműségnek? Az egyszerűség kedvéért vizsgáljuk meg ezt egy fő fókusztávolságú *vékony gyűjtőlencse* példáján.

A leképezési törvény alapján a lencsénk képalkotását az

(5) $$(1/k_0) + (1/t_0) = (1/f_0)$$

egyenlet írja le, ahol a k_0, ill. t_0 kép- ill. tárgytávolságokat a szokásos módon a lencsétől mérjük (4. ábra).



4. ábra

Könnyen ellenőrizhető, hogy (5) az

(6) $$\frac{1}{k_0 - 2f} + \frac{1}{t_0 - 2f} = -\frac{1}{f_0}$$

alakban is írható, vagyis ha a tárgy- és képtávolságokat az optikai tengely H_0 $(t_0 = 2f)$, ill. H_0' $(k_0 = 2f)$ pontjain átmenő h_0, ill. h_0' fősíkoktól mérjük, akkor egy f_0 fókusztávolságú *szórólencse* egyenletét kapjuk. A 4. ábrán a T tárgy képét megszerkesztettük a szokásos módon (folytonos vonal), ill. (6) alapján a fősíkok felhasználásával is (szaggatott vonal) (l. az 1764. feladat megoldását).

Láthatjuk, hogy a szerkesztés szerint is mind az (5), mind pedig a (6) összefüggés helyesen írja le az összetartozó kép- és tárgytávolságokat, de a (6) a valóságban keletkező K képhez képest a fordított állású K' képet adja. Ebből az következik, hogy bár (6) matematikailag egyenértékű átírása (5)-nek, a valóságos képviszonyokat az (5) alapján végzett szerkesztéssel kapjuk.

A példánkhoz hasonlóan – kissé hosszadalmasabban – belátható, hogy kétlencsés rendszerünk esetén is akkor kapunk helyes állású képet, ha szerkesztésünkben a (3a), (3b) transzformációkból adódó fősíkokat használjuk fel.