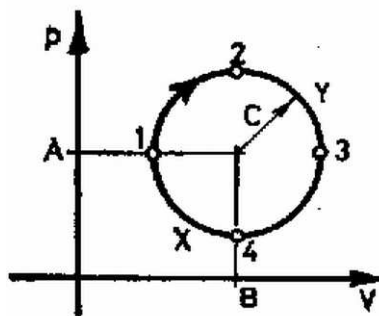


Legyen a körfolyamatot megadó kör egyenlete

$$(p - A)^2 + (V - B)^2 = C^2$$

és a körfolyamat iránya legyen az 1. ábrának megfelelő.



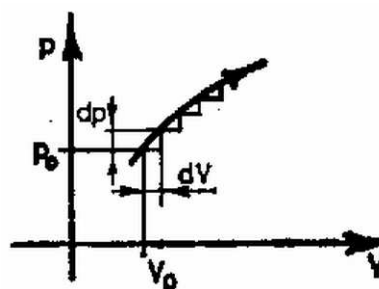
1. ábra

Ekkor egy hőerőgépünk van, amely hőtartályokból hőt vesz fel, illetve azoknak hőt ad le és munkát végez. A hatásfok (η) definíciója

$$(1) \quad \eta = W/Q,$$

ahol W a hőerőgép által végzett munka, Q pedig a hőtartályokból felvett hő. A munka kiszámítása jól ismert: W a körfolyamat által a $p-V$ diagramon bezárt területtel egyenlő. A hatásfok kiszámításához így már csak az összes felvett hőt kell meghatározni. Egyszerűség kedvéért a továbbiakban csak ideális gázra vonatkozó tárgyalásra szorítkozunk. (A gondolatmenet természetesen általánosan használható.)

Az állandó nyomáson, térfogaton mért fajhőket ismerjük. Ezért célszerűnek látszik az általános állapotváltozásokat állandó nyomású, illetve térfogatú állapotváltozások összegeként létrehozni. Tekintsük a 2. ábrán látható állapotváltozást, amelyet a $p = p(V)$ függvény jellemez.



2. ábra

Ezt helyettesíthetjük az ábrán berajzolt lépcsős görbével, ami állandó nyomású, ill. térfogatú állapotváltozásokból áll. Könnyű belátni, hogy a $p(V)$ függvény a lépcsős függvénnyel jól megközelíthető, tehát azt helyettesítheti. Próbáljuk meg a lépcsős függvényre kiszámolni a felvett hőt.

Tekintsük a $V_0 p_0 \rightarrow (V_0 + dV) p_0$ állandó nyomású állapotváltozást. A felvett hő

$$(2) \quad \Delta Q_p = C_p m \Delta T.$$

ΔT -t a

$$pV = mRT$$

egyenletből kaphatjuk meg,

$$p_0 V_0 = mRT_0, \quad p_0 (V_0 + dV) = mRT'$$

és így

$$\Delta T = T' - T_0 = (p_0/mR)dV.$$

Ezt (2)-be behelyettesítve kapjuk:

$$(3) \quad \Delta Q_p = (C_p/R)p_0 dV.$$

Ugyanilyen módon határozhatjuk meg az állandó térfogatú állapotváltozás során felvett hőt is, amire

$$(4) \quad \Delta Q_V = (C_V/R)V_0 dp$$

adódik. A körfolyamat $p_0V_0 \rightarrow (p_0 + dp)(V_0 + dV)$ elemi lépése alatt felvett hő tehát

$$(5) \quad \Delta Q = \Delta Q_p + \Delta Q_V.$$

Azt kell megvizsgálnunk, hogy (5) a körfolyamat mely pontjaiban pozitív, mert a körfolyamat ezen részén vesz fel hőerőgépünk hőt.

Az állandó nyomású állapotváltozáskor a gáz akkor vesz fel hőt, ha a gáz tágul ($dV > 0$), azaz a megadott irány esetén az 1 – 2 – 3 szakaszon. A (4) kifejezés viszont a 4 – 1 – 2 szakaszon pozitív ($dp > 0$), azaz az állandó térfogatú állapotváltozások során a 4 – 1 – 2 szakaszon hőfelvétel történik. Ebből következik, hogy az 1 – 2 szakaszon biztosan hőfelvétel van (hiszen mindkét elemi folyamat hőt vesz fel). A 2 – 3 szakaszon viszont az állandó nyomású elemi folyamat során hőfelvétel van, míg az állandó térfogatú elemi folyamat során hőleadás történik. (5) akkor pozitív, ha

$$\Delta Q_p > |\Delta Q_V|,$$

Jelöljük Y -nal azt a pontot, ameddig a hőfelvétel tart. Itt $\Delta Q_p = |\Delta Q_V|$, így (3) és (4) alapján

$$\frac{dp}{dV} = \frac{C_p}{C_V} \cdot \frac{P_Y}{V_Y}.$$

A kör egyenletét is felhasználva az A , B , C paraméterek ismeretében az Y pont numerikus megkeresése elég könnyű. A 3 – 4 szakaszon mindkét elemi változás során hőleadás van, tehát (5) negatív. A 4 – 1 szakaszon ugyanúgy, mint előbb, megkereshetjük az X pontot, amitől kezdve (5) ismét pozitív, azaz hőfelvétel van. A körfolyamat során tehát az $X - Y$ szakaszon van hőfelvétel. A teljes felvett hőt ismét az állandó nyomású, illetve térfogatú elemi folyamatok segítségével számoljuk ki.

Először azt számítjuk ki, hogy az állandó nyomású folyamatnál mekkora a hőfelvétel (ill. leadás) az $X - Y$ szakaszon. Az 1 – Y szakaszon hőfelvétel van:

$$(6) \quad Q_p^{1-Y} = \int_{V_1}^{V_Y} \frac{C_p}{R} p dV.$$

Vegyük észre, hogy ez éppen az 1 – Y görbeszakasz alatti terület szorozva (C_p/R) -rel. Az $X - 1$ szakaszon hőt ad le a gáz az állandó nyomású elemi folyamatoknál, mégpedig

$$(7) \quad Q_p^{X-1} = \int_{V_X}^{V_1} \frac{C_p}{R} p dV.$$

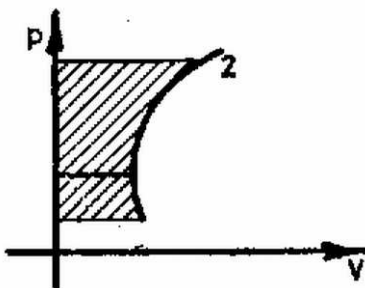
Tehát az állandó nyomású elemi folyamatok során az $X - Y$ szakaszon felvett hő (6) és (7) különbsége:

$$Q_p^{X-Y} = Q_p^{1-Y} - Q_p^{X-1}.$$

Ugyanígy járunk el az állandó térfogatú részfolyamatoknál is. Az $X - 2$ szakaszon hőfelvétel történik:

$$(8) \quad Q_V^{X-2} = \int_{P_X}^{P_1} \frac{C_V}{R} V dp.$$

A (8) integrál egyenlő, a görbe „melletti” terület (3. ábra) és C_V/R szorzatával.



3. ábra

A $2 - Y$ szakaszon hőleadás van:

$$(9) \quad Q_V^{2-Y} = \int_{\check{P}_2}^{P_Y} \frac{C_V}{R} V dp.$$

Az $X - Y$ szakaszon felvett teljes hő (az állandó nyomású és térfogatú elemi lépésekben felvett teljes hő) (6)–(9)-ből kapjuk:

$$Q = Q_p^{1-Y} + Q_V^{X-2} - Q_p^{X-1} - Q_V^{2-Y}.$$

Ezt behelyettesítve (1)-be a határfok kiszámítható.

Menyhárd Miklós